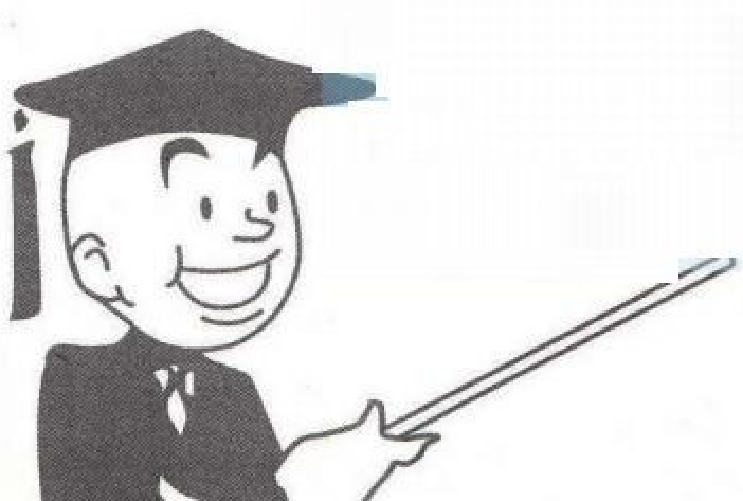
تم بيـع أكثـر من ٣٠ مليـون نسخـة من ملخصات شـوم!

الجبر العام

ملخصـات شـــوم
إيـــزى

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب علي التفوق والنجاح



مويــر
وآخرون

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

ملخصات شوم إيـزى

تم بيع أكثر من 30 مليون نسخة من ملخصات شوم

الجبر العـام

منهج دراسى مكثف

- يحتوى على مسائل كاملة الحل فى كل موضوع .
- أفكار متخصصة لفهم الجبر الجامعى .
- كل ما تحتاجه لاجتياز المنهج .

تاليف

موراى ر. شبيجل و روبرت إ. موير

اختصار

جورج ج. هاديمينوس

ترجمة

أستاذ دكتور / محمد خلوصى إسماعيل

مدير الكلية الفنية العسكرية (سابقا)

حقوق النشر

College Algebra

by

Murray R. Spiegel

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج . م . ع .

ص . ب، 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون، 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

رقم الإيداع : 2001/14344

I.S.B.N: 977-282-104-4

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيزياء العامة

ملخص شوم إيـزى : التفاضل والتكامل

ملخص شوم إيـزى : الإحصاء

ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة ++C

ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية

ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة

المحتويات

الفصل الأول
الأدوات الأساسية للجبر فى هذا الفصل
Fundamental Tools of Algebra

فى هذا الفصل :

- ✔ **العمليات الأساسية بالأعداد .**
- ✔ **خواص الأرقام الحقيقية .**
- ✔ **الأسس والقوى .**
- ✔ **اللوغاريتمات .**
- ✔ **الجذور .**
- ✔ **الأعداد المركبة .**

• العمليات الأساسية بالأعداد
Fundamental Operations with Numbers

أربع عمليات بالأعداد Four Operations with Numbers

الأربع عمليات الأساسية بالجبر هى

الجمع Addition عند جمع العددين a و b فنشير إلى المجموع $a + b$ وعلى ذلك $3 + 2 = 5$.

الطرح Subtraction عند طرح الرقم b من الرقم a فنشير إلى الفرق $a - b$ وعلى ذلك $6 - 4 = 2$.

الضرب Multiplication حاصل ضرب عددين a و b هو العدد c بحيث $a \bullet b = c$. نشير إلى عملية الضرب بعلامة × أو نقطة أو أقواس وعلى ذلك،

$$5 \times 3 = 5 \bullet 3 = (5)\,(3) = 15$$

القسمة Division عند قسمة الرقم a على الرقم b فيكتب خارج القسمة $a \div b$ أو $\frac{a}{b}$ أو a/b حيث a المقسوم و b المقسوم عليه . يطلق تعبير الكسر على a/b وله بسط a ومقام b .

القسمة على الصفر غير معرفة .

منظومة الأعداد الحقيقية System of Real Numbers

تحتوى منظومة الأعداد الحقيقية على الآتى

- **الأعداد الطبيعية Natural numbers** ...... ,1, 2, 3, 4 وتستخدم فى العد وتعرف أيضًا بالأعداد الصحيحة الموجبة . إذا جمع أو ضرب اثنين من هذه الأعداد فتكون النتيجة دائمًا عددًا طبيعيًا .
- **الأعداد الكسرية الموجبة Positive rational numbers** أو الكسور الموجبة وهى خارج قسمة عددين صحيحين موجبين مثل 2/3 أو 8/5 أو 121/17 . تشتمل الأعداد الكسرية الموجبة على مجموعة الأعداد الطبيعية . على ذلك العدد الكسرى 3/1 العدد الطبيعى 3 .
- **الأعداد الغير كسرية الموجبة Positive irrational numbers** وهى الأعداد الغير كسرية أى التى لا يمكن كتابتها كخارج قسمة عددين صحيحين مثل $\sqrt{2}$ أو π .
- الصفر **Zero** ويكتب 0 وأضيف لمنظومة الأعداد لتسمح بعمليات مثل 6 - 6 أو 10 - 10 . للصفر خاصية أنه إذا ضرب أى عدد فى صفر أصبح

الناتج صفراً . قسمة الصفر على أى عدد ليس صفراً يكون الناتج صفراً .

• الأعداد الصحيحة السالبة **Negative integers** والأعداد الكسرية السالبة **Negative rational numbers** والأعـــداد الغير كسرية الســالبة **Negative irrational numbers** مثـل 3- و 2/3- و $\sqrt{2}$ أزيـد بهـا منظومة الأعـداد لتسمح بعمليات مثـل 8 - 2 أو $2\pi - \pi$ و $2\sqrt{2} - 2$.

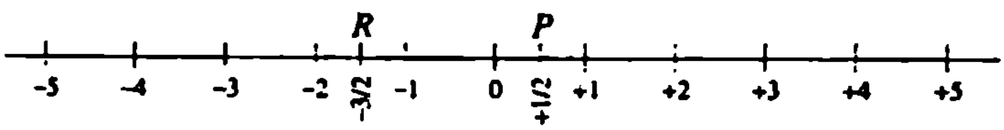
☆ **لاحـظ**

منظومة الأعداد الحقيقية تشتمل على مجموعة من الأعداد الكسرية الموجبة والسالبة والأعداد الغير كسرية الموجبة والسالبة والصفر .

التمثيل البيانى للأرقام الحقيقية

Graphical Representation of Real Numbers

من المفيد عادة تمثيل الأرقام الحقيقية كنقط على خط . لإجراء ذلك نختار نقطة على الخط لتمثيل الرقم الحقيقــى صفـر ونطلـق علـى هـذه النقطة نقطة الأصل . تتصل الأعداد الصحيحة الموجبة 1+ و 2+ و 3+ و . . . . . بالنقط على الخط على بعـد 1+ و 2+ و 3+ و . . . . من الوحدات على الترتيب يمين نقطة الأصل (انظر شكل 1-1) فى حيـن أن الأعداد الصحيحــة الســالبة 1- و 2- و 3- و . . . . تتصـل بـالنقط على الخط على بعد 1 و 2 و 3 و . . . . . من الوحدات على الــترتيب على يسار نقطة الأصل .



شكل 1-1

يمثل العدد الكسرى 1/2 على هذا التدريج بالنقطة P فى منتصف المسافة من 0 و 1+ . يمثل العدد السالب 3/2- أو $-1\frac{1}{2}$ بالنقطة R وتبعد $1\frac{1}{2}$ وحدة على يسار نقطة الأصل .

✓ يجب أن تعلم

موضع الأعداد الحقيقية على خط ينشئ ترتيب لمنظومة الأعداد الحقيقية . فإذا وقعت النقطة A على يمين نقطة أخرى B على الخط فنقول أن العدد المناظر إلى A أكبر من العدد المناظر إلى B أو أن الرقم المناظر إلى B أقل من الرقم المناظر إلى A .

فئات الأعداد الحقيقية Sets of Real Numbers

يمكن التعبير عن منظومة الأعداد الحقيقية بدلالة الفئات . الفئة

- لها محتوى نتيجة لعملية ما إذا كانت نتيجة إجراء هذه العملية بين عنصرين من الفئة تكون أيضًا عنصرًا للفئة . فتغلق الفئة X نتيجة للعملية * إذا كان لأى من العناصر a و b فى المجموعة X النتيجة $a*b$ تكون أيضًا عنصرًا فى المجموعة .
- لها وحدة نتيجة لعملية إذا كان هناك عنصر فى الفئة عند توفيقه مع أى عنصر من عناصر الفئة يترك هذا العنصر غير متغير . الفئة X لها وحدة لعملية * إذا كان هناك العنصر j من الفئة X بحيث $j*a = a*j = a$ لكل العناصر a فى الفئة X .
- لها انعكاس نتيجة لعملية ما إذا كان لكل عنصر من عناصر الفئة يكون هناك عنصر آخر من هذه الفئة بحيث أنه عند توفيق هذين العنصرين باستخدام هذه العملية تكون النتيجة هى الوحدة للفئة

نتيجة هذه العملية . إذا لم يكن للفئة وحدة نتيجة لعملية ما فلا يمكن أن يكون لها خاصية الانعكاس لهذه العملية . إذا كانت X هى فئة لها الوحدة j نتيجة لعملية فيكون لها انعكاس عندما يكون لكل عنصر a من الفئة X عنصر آخر a' أيضا من الفئة X بحيث $a*a'=j$ و $a'*a=j$.

- يمكن أن يكون لها ـ نتيجة لإجراء عملية ـ خاصية الاتحاد وخاصية الإبدال وإذا كان للفئة عمليتان فيمكن أن يكون للفئة خاصية التوزيع .

• خواص الأرقام الحقيقية Properties of Real Numbers

- **خاصية الإبـــدال للجمع Commutative property for addition** .

ترتيب جمع رقمين لا يؤثر على النتيجة وعلى ذلك

$a + b = b + a \qquad 5 + 3 = 3 + 5 = 8$

- **خاصية الاتحاد للجمع Associative property for addition** . يمكن تجميع حدود مجموع بأى طريقة بدون التأثير على النتيجة .

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

$$3 + (4 + 1) = (3 + 4) + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$$

- **خاصية الإبدال للضرب Commutative property for multiplication**

لا يؤثر ترتيب العوامل فى حاصل الضرب على النتيجة .

$a \bullet b = b \bullet a \qquad 2 \bullet 5 = 5 \bullet 2 = 10$

- **خاصية الاتحاد للضرب Associative property for multiplication**

يمكن تجميع عوامل الضرب بأى طريقة وذلك لا يؤثر على النتيجة .

$a(bc) = (ab)c = abc \qquad 3(4 \bullet 6) = (3 \bullet 4)6 = 3 \bullet 4 \bullet 6 = 72$

• خاصية التوزيع للضرب فى مجموع **Distributive property for multiplication over addition** . حاصل ضرب العدد a فى مجموع العددين $(b + c)$ يساوى مجموع حاصلى الضرب ab و ac .

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad 4(3 + 2) = 4 \bullet 3 + 4 \bullet 2 = 20$$

مثال 1-1 : أى من الخواص صحيحة لأعداد العد والأعداد الكاملة والأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية والأعداد الغير كسرية والأعداد الحقيقية عند إجراء عملية الجمع .

Example 1-1: Which properties are true for the counting numbers, whole numbers, integers, rational numbers, irrational numbers, and real numbers under the operation of addition?

+	العد	الكاملة	الصحيحة	الكسرية	غير الكسرية	الحقيقية
المحتوى	نعم	نعم	نعم	نعم	لا	نعم
الوحدة	لا	نعم	نعم	نعم	لا	نعم
الانعكاس	لا	لا	نعم	نعم	لا	نعم
الاتحاد	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم
الإبدال	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم

هناك بعض الخواص لفئات الأعداد والتى لا تعتمد على عملية ما لتكون صحيحة . ثلاث من هذه الخواص هى **الترتيب والكثافة والتمام** .

يكون لفئة الأرقام ترتيب order إذا كان هناك عنصران محددان من الفئة أحدهما أكبر من الآخر .

يكون لفئة الأرقام كثافة density إذا كان بين أى عنصرين من الفئة عنصر آخر من الفئة .

يكون لفئة الأرقام تمام completeness إذا كانت النقط التى تكون إحداثياتها عناصر المجموعة تملأ خطا أو مستوى .

مثال 1-2 : أى من الخواص التالية صحيحة لأعداد العد والأعداد الكاملة والأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية والأعداد غير الكسرية والأعداد الحقيقية .

Example 1-2: Which properties are true for the counting numbers, whole numbers, integers, rational numbers, irrational numbers, and real numbers?

+	العد	الكاملة	الصحيحة	الكسرية	غير الكسرية	الحقيقية
الترتيب	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم
الكثافة	لا	لا	لا	نعم	نعم	نعم
التمام	لا	نعم	لا	لا	لا	نعم

قواعد الإشارات Rules of Signs

- لجمع عددين لهما نفس الإشارة فاجمع قيمهم المطلقة واسبقها بالإشارة المشتركة . تعرف القيمة المطلقة لعدد حقيقية a بالمسافة بالوحدات من النقطة التى إحداثيها a إلى نقطة الأصل وعلى ذلك .

مثال 1-3 : $3 + 4 = 7$ ، $(-3) + (-4) = -7$

- لجمع عددين مختلفى الإشارة فأوجد الفرق بين قيمهم المطلقة واسبقها بإشارة العدد ذى الأكبر قيمة مطلقة .

مثال 1-4 : $17 + (-8) = 9$ ، $(-6) + 4 = -2$

- لطرح العدد b من عدد آخر a غير العملية لتكون جمعًا مع تغيير إشارة b لتكون $-b$.

مثال 1-5 : $12 - (7) = 12 + (-7) = 5$

$(-9) - (4) = -9 + (-4) = -13$

- لضرب (أو قسمة) عددين لهما نفس الإشارة اضرب (أو أقسم) قيمهم

المطلقة واسبقها بإشارة الزائد (أو بدون إشارة) .

مثال 1-6 : $(5)(3) = 15$ ، $(-5)(-3) = 15$ ، $-6/-3 = 2$

- لضرب (أو قسمة) عددين لهما إشارتين مختلفتين فاضرب (أو اقسم) قيمهم المطلق واسبقها بإشارة ناقص .

مثال 1-7 : $(3)(-6)$ -18 ، $(-3)(6) = -18$ ، $-12/4 = -3$

العمليات مع الكسور Operations with Fractions

يمكن إجراء العمليات مع الكسور بالقواعد التالية :

- تبقى قيمة الكسر بدون تغيير إذا ضرب أو قسم بسطه ومقامه على نفس الرقم على ألاّ يكون هذا الرقم صفراً .

مثال 1-8 : $\frac{3}{4} = \frac{3.2}{4.2} = \frac{6}{8}$ ، $\frac{15}{18} = \frac{15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{5}{6}$

- تغير إشارة البسط أو المقام يغير إشارة الكسر .

مثال 1-9 : $\frac{-3}{5} = \frac{3}{5} = \frac{3}{-5}$

- جمع كسرين لهما مقام مشترك يؤدى إلى كسر بسطه مجموع بسطى الكسرين ومقامه هو المقام المشترك .

مثال 1-10 : $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$

- يمكن إيجاد مجموع أو الفرق بين كسرين لهما مقامين مختلفين بإعادة كتابة الكسرين مع مقام مشترك .

مثال 1-11 : $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$

• حاصل ضرب كسرين يكون كسرًا بسطه حاصل ضرب البسطين للكسرين المعطيين ومقامه حاصل ضرب المقامين للكسرين المعطيين .

مثال 1-12 : $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15},\ \ \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{3\cdot8}{4\cdot9}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

• يكون معكوس الكسر كسرًا بسطه مقام الكسر المعطى ومقامه بسط الكسر المعطى وعلى ذلك معكوس 3 (أى 3/1) هو 1/3 ومعكوس كل من 5/8 و 4/3- هما 8/5 و 3/-4 (أو 3/4-) على الترتيب .

• لقسمة كسرين اضرب الأول بمعكوس الثانى .

مثال 1-13 : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc},\ \ \frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2\cdot5}{3\cdot4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

• الأسس والقوى Exponents and Powers

عند ضرب العدد a بنفسه n من المرات فيشار إلى حاصل الضرب $a \bullet a \bullet a \bullet\bullet\bullet\bullet a$ (n من المرات) بالرمز a^n ويقال « القوة النونية لـ a » أو « a للقوة n » أو « a لـ n » . في العدد a^n يطلق على العدد a القاعدة وعلى العدد الصحيح الموجب n الأس .

مثال 1-14 :

$$2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 = 2^5 = 32$$
$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$$
$$2 \bullet x \bullet x \bullet x = 2x^3$$
$$a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b = a^3b^2$$
$$(a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^3$$

إذا كان كلاً من p و q عددين صحيحين موجبين فتكون قوانين الأسس كما يلى :

(1) $a^p \bullet a^q = a^{p+q}$

$$2^3 \bullet 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

(2) $a^p/a^q = a^{p-q} = 1/a^{q-p}$ if $a \neq 0$

$$3^5/3^2 = 3^{5-2} = 3^3,\ 3^4/3^6 = 1/3^{6-4} = 1/3^2$$

(3) $(a^p)^q = a^{pq}$

$$(4^2)^3 = 4^6, \qquad (3^4)^2 = 3^8$$

(4) $(ab)^p = a^p b^p,\ (a/b)^p = a^p/b^p$ if $b \neq 0$

$$(4 \bullet 5)^2 = 4^2 \bullet 5^2,\ (5/2)^3 = 5^3/2^3$$

(5) $a^{-p} = 1/a^p$ if $a \neq 0$

$$2^{-4} = 1/2^4 = 1/16,\ 1/3^{-3} = 3^3 = 27, \quad -4x^{-2} = -4/x^2,$$
$$(a + b)^{-1} = 1/(a + b)$$

• اللوغاريتمات Logarithms

إذا كـان $b^x = N$ حيث N عدد موجب و b عـدد موجب يختلف عن 1 فيكون الأس هو لوغاريتم N للأساس b ويكتب $x = \log_b N$.

مثال 1-15 : اكتب $3^2 = 9$ باستخدام الترميز اللوغاريتمى .

Example 1-15: Write $3^2 = 9$ using logarithmic notation.

نظرًا لأن $3^2 = 9$ فيكون 2 هو لوغاريتم 9 للأساس 3 أو $2 = \log_3 9$.

مثال 1-16 : أوجد قيمة $\log_2 8$.

Example 1-16: Evaluate $\log_2 8$.

$\log_2 8$ هو العدد x بحيث يجب رفع القـاعدة 2 لتكـون 8 أو $2^x = 8$ ويكون $x = 3$ وعلى ذلك $\log_2 8 = 3$.

يكون كلاً من $b^x = N$ و $x = \log_b N$ علاقتين متناظرتين . يطلق على $b^x = N$ الصيغة الأسـية وعلـى $x = \log_b N$ الصيغـة اللوغاريتميـة لـهذه

العلاقة . وعلى ذلك تكون هناك قوانيــن لوغاريتمــات منــاظرة لقوانيــن الأسس .

قوانين اللوغاريتمات Laws of Logarithms

I ـ لوغاريتم حاصل ضرب عددين موجبيـن M و N يســاوى مجمــوع لوغاريتمى العددين أى

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

مثال 1-17 : عبر عن $\log_2 3(5)$ بدلالة لوغاريتمات أبسط .

$$\log_2 3(5) = \log_b 3 + \log_b 5$$

Example 1-17: Express $\log_2 3(5)$ in terms of simpler logarithms

$$\log_2 3(5) = \log_b 3 + \log_b 5$$

II ـ لوغاريتم خارج قسمة عددين موجبين M و N يساوى الفــرق بيـن لوغاريتمى العددين أى

$$\log_b (M/N) = \log_b M - \log_b N$$

مثال 1-18 : عبر عن $\log_{10} (17/24)$ بدلالة لوغاريتمات أبسط .

$$\log_{10} (17/24) = \log_{10} 17 - \log_{10} 24$$

Example 1-18: Express $\log_{10} (17/24)$ in terms of simpler logarithms

$$\log_{10} (17/24) = \log_{10} 17 - \log_{10} 24$$

III ـ لوغاريتم القوة p للعدد M يساوى p مضروبًا فى لوغاريتم العدد أى

$$\log_b M^p = p \log_b M$$

مثال 1-19 : أوجد قيمة $\log_7 5^3$.

$$\log_7 5^3 = 3 \log_7 5$$

Example 1-19: Evaluate $\log_7 5^3$.

$$\log_7 5^3 = 3 \log_7 5$$

تذكر !

اللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithms

نظام اللوغاريتمات ذو القاعدة للعدد الثابت e يطلق عليه نظام اللوغاريتمات الطبيعى . العدد e هو عدد غير كسرى ويعرف $e = 2.718281828$. يكتب اللوغاريتم ذى القاعدة e بـ ln . الصيغة الأسية للصيغة $\ln a = b$ هى $e^b = a$ وعلى ذلك $\ln 25 = \log_e 25$.

• الجذور Radicals

الجذر هو تعبير عن الشكل $\sqrt[n]{a}$ والذى يشير إلى الجذر النونى الرئيسى للعدد a . العدد الصحيح الموجب n هو دليل أو درجة الجذر . العدد a هو المجذور . بحذف الدليل إذا كان $n = 2$.

قوانين الجذور Laws of Radicals

تجعل كتابة $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ قوانين الجذور مماثلة لقوانين الأسس . فيما يلى القوانين المتكررة الاستخدام .

ملاحظة : إذا كانت n زوجية فافترض a و b أكبر أو تساوى صفراً .

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

مثال 1-20 : $(\sqrt[3]{6})^3 = 6, \quad (\sqrt[4]{x^2+y^2})^4 = x^2+y^2$

(2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

مثال 1-21 :

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[7]{x^2y^5} = \sqrt[7]{x^2}\,\sqrt[7]{y^5}$$

(3) $b \neq 0 \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

مثال 1-22 :

$$\sqrt[5]{\frac{5}{32}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{(y-2)^6}} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(y-2)^6}} = \frac{x+1}{(y-2)^2}$$

(4) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

مثال 1-23 : $\sqrt[3]{(27)^4} = (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

مثال 1-24 :

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}, \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}, \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$$

تبسيط الجذور Simplifying Radicals

يمكن تغيير صيغة الجذر بالطرق التالية

(1) استخراج القوى النونية الكاملة من المجذور .

مثال 1-25 :

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3(4)} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{8x^5y^7} = \sqrt{(4x^4y^6)(2xy)} = \sqrt{4x^4y^6}\,\sqrt{2xy} = 2x^2y^3\sqrt{2xy}$$

(2) تخفيض دليل الجذر

مثال 1-26 :

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

حيث خفض دليل الجذر من 4 إلى 2

$$\sqrt[6]{25x^6} = \sqrt[6]{(5x^3)^2} = (5x^3)^{2/6} = (5x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{5x^3} = x\sqrt[3]{5},$$

حيث خفض الدليل من 6 إلى 3

لاحظ : $\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$

ومن الخطأ كتابة $\sqrt[4]{(-4)^2} = (-4)^{2/4} = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$

(3) استخراج المقام فى المجذور من علاقة الجذر .

مثال 1-27 :

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\left(\frac{2^2}{2^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{9(2^2)}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$

نقطة مهمة !

يقال أن الجذر فى أبسط صورة إذا :

(أ) استخرجت كل القوة النونية الكاملة من الجذر .

(ب) دليل الجذر أقل ما يمكن .

(جـ) لا توجد كسور فى المجذور أى استخرج المقام من الجذر .

• الأعداد المركبة Complex Numbers

العدد المركب هو تعبير بالصيغة $a + bi$ حيث a و b أعداد حقيقية و $i = \sqrt{-1}$. فى الأعداد المركبة يطلق على a الجزء الحقيقى و b الجزء التخيلى .

• يتساوى العـددين المركبين a + bi ، c + di إذا كـان وفقـط إذا كـان a = c و b = d .

• يكون العدد المركب a + bi = 0 إذا كان وفقط إذا كان a = 0 و b = 0.

• العدد المركـب c + di يكـون حقيقيًـا إذا كـان d = 0 . إذا كـان c + di = 3 فيكون c + 3 و d = 0 .

• العدد المرافق للعدد المركب a + bi هو a - bi والعكس . وعلى ذلـك يكون 5 - 3i و 5 + 3i مترافقين .

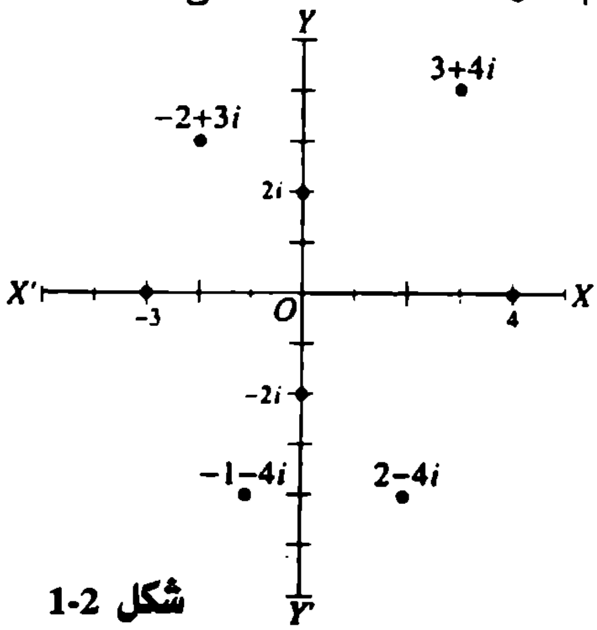
التمثيل البيانى للأعداد المركبة

Graphical Representation of Complex Numbers

باستخدام محاور الإحداثيات المتعامدة يمثـل العـدد المركـب x + yi ويناظر النقطة ذات الإحداثيات (x, y) . انظر شكل 1-2 .

• لتمثل العدد المركب 3 + 4i فقس مسافة 3 وحدات X'X ويمين 0 ثم 4 وحدات مسافة لأعلى .

• لتمثيل العدد 2- + 3i فقس 2 وحدة مسافة علـى امتـداد X'X ولجهـة اليسار من 0 ثم 4 وحدات مسافة لأسفل .



شكل 1-2

• لتمثيل العدد $-1-4i$ فقس مسافة 1 وحدة على امتداد X'X وليسار 0 ثم 4 وحدات مسافة لأسفل .

• لتمثيل العدد $2-4i$ فقس مسافة 2 وحدة على امتداد X'X وليمين 0 ثم 4 وحدات مسافة لأسفل .

العمليات الجبرية مع الأعداد المركبة

Algebraic Operations with Complex Numbers

• لجمع عددين مركبين اجمع كلاً من الجزئين الحقيقيين والجزئين التخيليين منفصلين .

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(5 + 4i) + (3 + 2i) = (5 + 3) + (4 + 2)i = 8 + 6i$$
$$(-6 + 2i) + (4 - 5i) = (-6 + 4) + (2 - 5)i = -2 - 3i$$

• لطرح عددين مركبين فاطرح الجزئين الحقيقيين والجزئين التخيليين منفصلين

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
$$(3 + 2i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + (2 + 3)i = -2 + 5i$$
$$(-1 + i) - (-3 + 2i) = (-1 + 3) + (1 - 2)i = 2 - i$$

• لضرب عددين مركبين فعامل الأعداد كذات الحدين العادية مع استبدال $i^2 = -1$.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$(5 + 3i)(2 - 2i) = 10 - 10i + 6i - 6i^2 = 10 - 4i - 6(-1) = 16 - 4i$$

• لقسمة عددين مركبين فاضرب كل من مقام وبسط الكسر بمرافق المقام مع استبدال $i^2 = -1$.

$$\frac{2+i}{3-4i} = \left(\frac{2+i}{3-4i}\right)\left(\frac{3+4i}{3+4i}\right) = \frac{6+8i+3i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$$

الفصل الثانى
المقادير الجبرية والعمليات
Algebraic Expressions and Operations

في هذا الفصل :

- ✔ المقادير الجبرية .
- ✔ حواصل ضرب خاصة .
- ✔ حواصل الضرب التى تؤول إجاباتها
  إلى الصيغة $a^n \pm b^n$.
- ✔ التحليل إلى عوامل .
- ✔ طرق التحليل إلى عوامل .
- ✔ القاسم المشترك الأعظم .
- ✔ المضاعف المشترك الأصغر .
- ✔ الكسور الجبرية .
- ✔ عمليات مع الكسور الجبرية .
- ✔ الكسور المركبة .

• المقادير الجبرية Algebraic Expressions

المقدار الجبرى هـو مجموعة مـن الأعداد العادية والحروف التى تمثل أعداد .

مثال 2-1 : $3x^2 - 5xy + 2y^2$ و $2a^3b^5$ و $\frac{5xy+3z}{2a^2-c^2}$

تعبيرات جبرية .

الحد يحتوى على حواصل ضرب وخوارج قسمة لأعداد عادية وحـروف تمثل الأعداد .

أحادى الحد هو مقدار جبرى يحتوى على حد واحد فقط **وكثـــير الحدود** يحتوى على أكثر من حد واحد . بتعبير أدق **ثنـــائى الحـــد** أو **ذات الحدين** تحتوى على حدين **وثلاثى الحدود** يحتوى ثلا ثة حدود .

مثال 2-2 :

أحاديات الحد	$7x^3y^4$, $4x^2/y$
ثنائيات الحدود أو ذوات الحدين	$3x^4 - 4xyz^3$, $2x + 4y$
ثلا ثيات الحدود	$x^3 - 2xy/^2 - 2x^3z^7$, $3x^2 - 5x + 2$
كثيرات الحدود	$7x + 6y$, $7x + 5x^2/y - 3x^2/16$

الحـدود Terms

يقال لأحد عوامل الحد معامل باقى الحد وعلى ذلك فى الحـــد $5x^3y^2$ يكون $5x^2$ هو معامل y^2 و $5y^2$ هو معامل x^3 و 5 معامل x^3y^2 .

يمكن تجميع حدين متماثلين أو أكثر فى مقدار جبرى واحد إلى حد واحد فعلى ذلك $7x^2y - 4x^2y + 2x^2y$ يمكن تجميعهم وكتابتهم $5x^2y$.

يكون الحد صحيحًا أو كسريًا فى بعض الحروف (الحروف الممثلة لأعداد) إذا احتوى الحد على :

- قوى صحيحة وموجبة للمتغيرات مضروبة فى عوامل لا تحتوى متغيرات.

أو

- لا توجد متغيرات تمامًا .

مثال 2-3 : الحدود $6x^2y^3$ ، $-5y^4$ ، $-4x$ ، $\sqrt{3}\,x^3y^6$

هى صحيحة أو كسرية فى المتغيرات الموجودة ، إلا أن $3\sqrt{x}$ ليست كسرية فى x و 4/x ليست صحيحة فى x .

كثيرة الحدود هى أحادية الحد أو متعددة الحدود يكون فيها كل حد صحيحًا أو كسريًا .

مثال 2-4 : $3x^2y^3 - 5x^4y + 2$ ، $4xy + z$ ، $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ، $3x^2$ كلهم كثيرة الحدود .

فى حين $3x^2 - 4/x$ ، $4\sqrt{y} + 3$ لا يكونان كثيرات الحدود .

الدرجة Degree

درجة أحادى الحد هو مجموع كل الأسس للمتغيرات فى الحد . على ذلك درجة $4x^3y^2z$ هى $6 = 3+2+1$. درجة الثابت مثل 6 أو 0 أو $\sqrt{3}$ أو π هى صفر .

درجة كثيرة الحدود هى نفسها درجة الحد ذى أكبر درجة ومعامله ليس صفرًا . على ذلك $7x^3y^2 - 4xz^5 + 2x^3y$ له حدود درجتها 5 ، 6 ، 4 على الترتيب فتكون درجة كثيرة الحدود هى 6 .

✓ يجب أن تعلم

التجميع Grouping

تستخدم عادة رمز التجميع مثل الأقواس ( ) أو الأقواس المربعة [ ] أو الحاصرة { } لإظهار أن الحدود المحتواة فيهم تعامل ككمية واحدة .

الحسابات مع المقادير الجبرية

Computation with Algebraic Expressions

تتحقق عمليـة جمـع المقـادير الجبريـة بتجميـع الحـدود المتماثلـة . لتحقيق هذا الجمع فترتب المقادير فـى صفـوف تكـون فيـها الحـدود المتماثلة فى نفس العمود ثم تجمع هذه الأعمدة .

مثال 5-2 : اجمع $7x + 3y^2 - 4xy$ ، $3x - 2y^3 + 6xy$ و $2xy - 5x - 6y^3$.

اكتب

$7x$	$3y^3$	$-4xy$	
$3x$	$-2y^3$	$7xy$	
$-5x$	$-6y^3$	$2xy$	
$5x$	$-5y^3$	$5xy$	الجمع

فتكون النتيجة : $5x - 5x^3 + 5xy$

طرح مقدارين جبريين يتحقق بتغير إشارة كل حد فى المقدار الذى سيتم طرحه (فـى بعض الأحوال يسمى المطـروح) وجمـع النـاتج إلـى التعبير الآخر (ويطلق عليه المطروح منه) .

مثال 6-2 : اطرح $2x^2 - 3zy + 5y^2$ من $10x^2 - 2\,xy - 3\,y^3$.

اكتب

	$10x^2$	$-2xy$	$-3y^2$
	$-2x^2$	$+3xy$	$-5y^2$
الطرح	$8x^2$	$+xy$	$-8y^2$

وعلى ذلك تكون النتيجة : $8x^2 + xy - 8y^2$

يتحقق ضرب المقادير الجبرية بضرب الحدود فى عوامل المقدار .

(1) لضرب اثنان أو أكثر من أحاديات الحدود استخدم قانون الأسس وقاعدة الإشارات وخواص الإبدال والاتحاد للضرب .

مثال 2-7 : اضرب $-3x^2y^3y$ ، $2x^4y$ ، $-4xy^4z^2$.

- اكتب : $(-4xy^4z^2)\ (2x^4y)\ (-3x^2y^3y)$
- رتب حسب قوانين الإبدال والاتحاد

$$\{(-3)(2)(-4)\}\{(x^2)(x^4)(x)\}\{(y^3)(y)(y^4)\}\{(z)(z^2)\}$$

- جمع باستخدام قاعدة الإشارات وقوانين الأسس لنحصل على $24x^7y^8z^3$

(2) لضرب كثيرة الحدود بأحادية الحد : اضرب كل حد من كثيرة الحدود بأحادى الحد وجمع النتائج .

مثال 2-8 : اضرب $3xy - 4x^3 + 2xy$ مع $5\,x^2y^4$

- اكتب $(3xy - 4x^3 + 2xy)$
- اضرب كل حد

$$(5\,x^2y^4)\ (3xy) + (5\,x^2y^4)\ (-4x^3) + (5\,x^2y^4)\ (2xy)$$

- تكون النتيجة : $15x^3y^5 - 20\,x^5y^4 + 10x^3y^6$

(3) لضرب كثيرة الحدود بكثيرة حدود : اضـرب كـل حـد مـن أحـد كثيرات الحدود فى كل حـد مـن كثـيرة الحـدود الأخـرى وجمـع النتائج . (عادة ما يكون مفيدًا جدًا ترتيب كثيرات الحدود حسب القوى التصاعدية أو التنازلية لأحد الحروف المشتملة) .

مثال 2-9 : اضرب $x^2 + 9 + 3x$ فى $3 - x$

• رتب حسب القوى التنازلية لـ x

$$x^2 - 3x + 9 \qquad (A)$$

$$-x + 3$$

اضرب (A) فى -x: $-x^3 + 3x^2 - 9x$

اضرب (A) فى +3: $3x^2 - 9x + 27$

بالجمع: $-x^3 + 6x^2 - 18x + 27$

(4) لقسمة أحادى الحد علـى أحـادى الحـد : أوجـد خـارج قسـمة المعادلات العددية وأوجـد خـارج قسـمة المتغـيرات ثـم اضـرب خوارج القسمة هذه .

مثال 2-10 : اقسم $24x^4y^2z^3$ على $3x^3y^4z$

$$\frac{24x^4y^2z^3}{-3x^3y^4z} = \left(\frac{24}{-3}\right)\left(\frac{x^4}{x^3}\right)\left(\frac{y^2}{y^4}\right)\left(\frac{z^3}{z}\right)$$

$$= (-8)(x)\left(\frac{1}{y^2}\right)(z^2)$$

$$= -\frac{8xz^2}{y^2}$$

(5) لقسمة كثيرة الحدود على كثيرة الحدود :

(أ) رتب حدود كلا كثيرات الحدود حسب قوى أحد المتغيرات التنازلية (التصاعدية) لكلا المقدارين .

(ب) اقسم الحد الأول فى المقسوم على الحد الأول فى المقسوم عليه . هذا يعطى الحد الأول من خارج القسمة .

(جـ) اضرب الحد الأول من خارج القسمة فى المقسوم عليه واطرح من المقسوم لتحصل على مقسوم جديد .

(د) استخدم المقسوم الجديد الذى نحصل عليه من (جـ) لإعادة الخطوات (ب) و (جـ) حتى نحصل على باقى تكون درجته أقل من درجة المقسوم عليه أو نحصل على صفر .

(هـ) نكتب النتيجة

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{خارج القسمة} + \frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}} = \text{quotient} + \frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$$

مثال 11-2 : اقسم $x^2 + 2x^4 - 3x^3 + x - 2$ على $x^2 - 3x + 2$

اكتب كثيرى الحدود بعد ترتيبهما على حسب القوى التنازلية لـ x ورتب العمل كما يلى

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 3x + 6 \\ x^2 - 3x + 2 & 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 \\ & \underline{2x^4 - 6x^3 + 4x^2} \\ & \quad 3x^3 - 3x^2 + x - 2 \\ & \quad \underline{3x^3 - 9x^2 + 6x} \\ & \qquad 6x^2 - 5x - 2 \end{array}$$

• حواصل ضرب خاصة Special Products

فيما يلى بعض حواصل الضرب التى تحدث كثيرًا فى الرياضيات

ويجب أن يلم بها الطالب فى أقرب وقت ممكن . يمكن الحصول على إثبات هذه النتائج بإجراء عمليات الضرب .

I ـــ حاصل ضرب أحادية الحد مع ذات الحدين

Product of a monomial and a binomial

$$a(c + d) = ac + ad$$

مثال 2-12 : أوجد حاصل الضرب $3x(2x + 3y)$

باستخدام **I** مع $a = 3x$ و $c = 2x$ و $d = 3y$.

$$\text{ex } 3x(2x + 3y) = (3x)(2x) + (3x)(3y) = 6x^2 + 9xy$$

II ـــ حاصل ضرب المجموع والفرق لحدين

Product of the sum and the difference of two terms

$$(a + b)(c - d) = a^2 - b^2$$

مثال 2-13 : أوجد حاصل الضرب $(2x + 3y)(2x - 3y)$.

باستخدام **II** مع $a = 2x$ و $b= 3y$

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 3x^2 - 9y^2$$

III ـــ مربع ذات الحدين Square of a binomial

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$

مثال 2-14 : أوجد حواصل الضرب (1) $(3x + 5y)^2$ ،

(2) $(7x^2 - 2xy)^2$

(1) باستخدام **III** مع $a = 3x$ و $b = 5y$

$$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

(2) باستخدام III مع $a = 7x^2$ و $b = 2xy$

$$(7x^2 - 2xy)^2 = (7x2)^2 - 2(7x^2)(2xy) + (2xy)^2 = 49x^4 - 28x^3y + 4x^2y^2$$

IV ـــ حاصل ضرب اثنين من ذات الحدين

Product of a two binomials

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

مثال 2-15 : أوجد حاصل ضرب (1) $(x + 3)(x + 5)$

(2) $(3x + y)(4x - 2y)$

(1) باستخدام IV مع $a = 3$ و $b = 5$

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + (3)(5) = x^2 + 8x + 15$$

(2) باستخدام IV مع $a = 3x$ و $b = y$ و $c = 4x$ و $d = -2y$

$$(3x + y)(4x - 2y) = (3x)(3x) + (y)(4x) + (3x)(-2y) + (y)(-2y)$$

$$= 12x^2 - 2\,xy - 2y^2$$

V ـــ مكعب ذات الحدين Cube of a binomial

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

مثال 2-16 : أوجد حواصل الضرب (1) $(x + 2y)^3$

(2) $(2y - 5)^3$

(1) باستخدام V مع $a = x$ و $b = 2y$

$$(x + 2y)^3 = x^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3$$
$$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$

(2) باستخدام V مع $a = 2y$ و $b = 5$

$$(2y - 5) = (2y)^3 - 3(y)^2(5) + 3(2y)(5)^2 - (5)^3$$
$$= 8y^3 - 60y^2 + 150y - 125$$

VI ـــ مربع ثلاثية الحدود Square of a trinomial

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ab + 2bc$$

مثال 2-17 : أوجد حاصل الضرب $(2x + 3y + z)^2$

باستخدام **VI** مع $a = 2x$ و $b = 3y$ و $c = z$

$$(2x + 3y + z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 (z)^2 + 2(2x)(2y) + 2(2x)(z) + 2(2y)(z)$$
$$= 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xy + 6yz$$

• حواصل الضرب التى تؤول إجاباتها إلى الصيغة $a^n \pm b^n$
Products Yielding Answers of the Form $a^n \pm b^n$

يمكن التحقيق بإجراء الضرب أن

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$
$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$$
$$(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = a^6 - b^6$$

ومنها تتضح القاعدة . يمكن تلخيص ذلك بالآتى :

VII ـــ $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

حيث n عدد صحيح موجب $(1, 2, 3, 4, ...)$

مثال 2-18 : أوجد حاصل الضرب $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

باستخدام **VII** مع $a = x$ و $b = 2y$

$$(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^3 - (2y)^3 = x^3 - 8y^3$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$$
$$(a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = a^7 + b^7$$

ومنها تتضح القاعدة . يمكن تلخيص ذلك بالآتى :

VIII — $$(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n$$

حيث n هو أى عدد صحيح موجب مفرد (. . . . . ,1, 2, 3, 4) .

مثال 2-19 : أوجد حاصل الضرب $(xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 4)$

باستخدام **VIII** مع $a = xy$ و $b = 2$

$$(xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 4) = (xy)^3 + (2)^3 = x^3y^3 + 8$$

• التحليل إلى عوامل Factoring

تشتمل عوامل مقدار جبرىّ معين على اثنين أو أكثر من المقادير الجبرية والتى إذا ضربت معًا ينتج عنها المقدار المعين .

مثال 2-20 : حلل كل من المقادير الجبرية

(أ) $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

(ب) $x^2 + 8x = x(x + 8)$

جـ) $6x^2 - 7x - 5 = (3x - 5)(2x + 1)$

د) $x + 2xy - 8y^2 = (x + 4y)(x - 2y)$

يقال أن **كثير الحدود polynomial** قد حلـل تمامًـا عندمـا يعـبر عنـه كحاصل ضرب عوامله الأولية .

- عند التحليل سنسمح بالتغييرات الهامشية فى الإشارة . على ذلك يمكن أن تحلل $x^2 - 7x + 6$ إلى أى من $(x - 1)(x - 6)$ أو $(1 - x)(6 - x)$.
- يقال على كثيرة الحدود أولية إذا لم يكن لها عوامـل غـير موجبـها أو سالبها أو ± 1 .
- فى بعض الأحيان يمكننا تحليل كثيرات الحدود ذات المعاملات الكسرية مثلاً $(x^2 - 9/4) = (x + 3/2)(x - 3/2)$.
- فى بعض الأحيان يمكننا تحليل مقدار على فئة معينة من الأعداد فمثلاً $(x^2 - 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ حللـت علـى فئـة مـن الأعـداد الحقيقيـة ولكنها تعتبر أولية على فئـة مـن الأعـداد الكسـرية . مـالم تحـدد فئـة الأعداد المستخدمة لمعاملات العوامل فنفترض فئة الأعداد الصحيحة .

• طرق التحليل إلى عوامل Factorization Procedures

فيما يلى طرقًا تكون مفيدة جدًا للتحليل

(أ) العامل أحادى الحد المشترك Common monomial factor

من نوع $$\mathbf{ac + ad = a(c + d)}$$

مثال 2-21 :

(a) $6x^2y - 2x^3 = 2x^2(3y - x)$

(b) $2x^3y - xy^2 + 3x^2y = xy(2x^2 - y + 3x)$

Difference of two squares الفرق بين مربعين (ب)

من نوع $$a^2 - b^2 = (a + b)(a - c)$$

مثال 2-22 :

(a) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$
where $a = x$, $b = 5$
(b) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$
where $a = 2x$, $b = 3y$

Perfect square trinomials مربع كامل ثلاثى الحدود (جـ)

من نوع
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

مثال 2-23 :

(a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
(b) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$

Other trinomials ثلاثيات الحدود الأخرى (د)

من نوع
$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$
$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

مثال 2-24 :

(a) $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$
where $a = -4$, $b = -1$
(b) $x^2 + xy - 12y^2 = (x - 3y)(x + 4y)$
where $a = -3y$, $b = 4y$
(c) $8 - 14x + 5x^2 = (4 - 5x)(2 - x)$

Sum, difference of two cubes مجموع والفرق بين مكعبين (هـ)

من نوع
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال 2-25 :

$$\text{(a) } 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$$
$$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$$
$$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$
$$\text{(b) } 8x^3y3 - 1 = (2xy)^3 - 1^3$$
$$= (2xy - 1)(4x^2y^2 + 2xy + 1)$$

(و) تجميع الحدود Grouping of terms

من نوع

$$\mathbf{ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b)}$$
$$\mathbf{= (a + b)(c + d)}$$

مثال 2-26 :

$$2ax - 4bx + ay - 2by = 2x(a - 2b) + y(a - 2b)$$
$$= (a - 2b)(2x + y)$$

(ز) عوامل $a^n \pm b^n$ Factors of $a^n \pm b^n$

مثال 2-27 :

$$\text{(a) } 32x^5 + 1 = (2x)^5 + 1^5$$
$$= (2x + 1)[(2x)^4 - (2x)^3 + (2x)^2 - 2x + 1]$$
$$= (2x + 1)[16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1]$$
$$\text{(b) } x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

(ح) جمع وطرح حدود مناسبة
Addition and subtraction of suitable terms

مثال 2-28 : حلل $x^2 + 4$

بجمع وطرح $4x^2$ (ضعف حاصل مربع جذرى x^4 و 4 التربيعيين) نجد

$$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$
$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$
$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$
$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

I. تجميعات مختلفة من الطرق السابقة

Miscellaneous combinations of previous methods

مثال 2-29 :

$$
\begin{aligned}
x^4 - xy^3 - x^3y + y^4 &= (x^4 - xy^3) - (x^3y - y^4)\\
&= x(x^3 - y^3) - y(x^3 - y^3)\\
&= (x^3 - y^3)(x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x - y)\\
&= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)
\end{aligned}
$$

• القاسم المشترك الأعظم Greatest Common Factor

القاسم المشترك الأعظم (GCF) لاثنين أو أكثر من كثيرات الحدود هو كثير حدود ذو أكبر درجة وأكبر معاملات عددية (تغيير الإشارات الهامشية لا تدخل هنا) الذى يكون عاملاً لكل كثيرات الحدود المعطاة.

لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لعدد من كثيرات الحدود .

- اكتب كل كثيرة حدود كحاصل ضرب لعوامله الأولية .
- يكون القاسم المشترك الأعظم هو حاصل الضرب الذى نحصل عليه بأخذ كل حد لأقل أس والذى حدث فى كل كثير حدود .

مثال 2-30 : أوجد القاسم المشترك الأعظم لكل من

$2^3 3^2(x - y)^3(x + 2y)^2$ ، $2^2 3^3(x - y)^2(x + 2y)^3$ و $3^2(x - y)^2(x + 2y)$

يكون القاسم المشترك الأعظم للثلاث كثيرات حدود هو:

$$3^2(x - y)^2(x + 2y)$$

• المضاعف المشترك الأصغر Least Common Multiple

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لاثنين أو أكثر من كثيرات الحدود

هو كثير حدود ذو الدرجة الأصغر وأقل معاملات عددية (بعيدًا عن تغيير الإشارات الهامشية) الذى يكون كل من كثيرات الحدود المعطاة عاملاً له .

لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعدد من كثيرات الحدود .

- اكتب كل كثير حدود كحاصل ضرب لعوامله الأولية .
- المضاعف المشترك البسيط هو حاصل الضرب الذى نحصل عليه بأخذ كل عامل لأكبر أس يحدث فى كثيرات الحدود .

مثال 2-31 : أوجد المضاعف المشترك الأصغر فى

$2^3 3^2 (x - y)^3 (x + 2y)^2$ ، $2^2 3^3 (x - y)^3 (x + 2y)^3$ و $3^2 (x - y)^2 (x + 2y)$

يكون المضاعف المشترك الأصغر للثلاث كثيرات حدود هو:

$$2^2 3^3 (x - y)^3 (x + 2y)^3$$

• الكسور الجبرية Algebraic Fractions

الكسور الجبرية الكسرية Rational Algebraic Fractions

الكسر الجبرى الكسرى هو مقدار يمكن كتابته كخارج قسمة اثنين من كثيرات الحدود P/Q . يطلق على P البسط وعلى Q المقام للكسر على ذلك .

$$\frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 8} \quad \text{و} \quad \frac{x^3 + 2y^2}{x^4 - 2xy + 2y^3}$$

يكونان كسرين جبريين كسريين .

قواعد التعامل مع الكسور تماثل تلك التى نتعامل بها مع الكسور فى الحساب . أحد القواعد العامة هى :

قيمة الكسر لا تتغير إذا ضرب كلاً من بسطه ومقامه بنفس الكمية أو إذا قسما بنفس الكمية على ألا تكون هذه الكمية صفرًا . فى هذه الحالات تكون الكسور متناظرة .

فمثلاً إذا ضربنا بسط ومقام $(x + 2)/(x - 3)$ بالكمية $(x - 1)$ نحصل على الكسر المناظر .

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

بحيث $(x - 1)$ ليست صفرًا أى $x \neq 1$.

بالمثل إذا أعطيت الكسر $(x^2 + 3x - 2)/(x^2 + 4y + 3)$ فيمكن كتابته

$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+1)}$$

وبقسمة البسط والمقام على $(x + 1)$ نحصل على $(x + 2)/(x - 3)$ بشرط ألا تكون $(x + 1)$ صفرًا أى $x \neq -1$.

يتصل بالكسر ثلاث إشارات . إشارة البسط وإشارة المقام وإشارة الكسر كله . يمكن تغيير إشارة اثنين منهما بدون تغير قيمة الكسر . إذا لم توضح إشارة قبل إشارة فيفهم ضمنيًا أن الإشارة زائد .

مثال 2-32 :

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad -\left(\frac{-a}{-b}\right) = -\frac{a}{b}$$

يمكن أن يكون تغير الإشارة مفيدًا عند التبسيط . على ذلك

$$\frac{x^2-3x+2}{2-x} = \frac{(x-2)(x-1)}{2-x} = \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)} = \frac{x-1}{-1} = 1-x$$

• عمليات مع الكسور الجبرية
Operations with Algebriac Fractions

المجموع الجبرى لكسور لها مقام مشترك يكون كسرًا بسطه المجموع الجبرى لبسط كل كسر معطى ومقامه المقام المشترك .

مثال 2-33 :

$$\frac{2}{x-3}-\frac{3x+4}{x-3}+\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{2-(3x+4)+(x^2+5)}{x-3}=\frac{x^2-3x+3}{x-3}$$

لجمع أو طرح عدد كسرى له مقامات مختلفة فنكتب كـل كسـر ككسـر مناظر وجميعهم له مقام مشترك .

مثال 2-34 :

$$\frac{2x+1}{x(x+2)}-\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{(2x+1)(x-1)-3x}{x(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-1)}{x(x+2)(x-1)}-\frac{3x}{x(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2-4x-1}{x(x+2)(x-1)}$$

حاصل ضرب كسرين أو أكثر ينتج كسرًا بسطه حاصل ضرب بسط كل كسر معطى ومقامه حاصل ضرب مقام كل كسر معطى .

مثال 2-35 :

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x-5}{x+3}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x-1)}\cdot\frac{x-5}{x+3}=\frac{x-3}{x-1}$$

نحصل على خارج قسمة كسرين بقلب المقسوم عليه ثم الضرب .

مثال 2-36 :

$$\frac{7}{x^2-4}\div\frac{xy}{x+2}=\frac{7}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x+2}{xy}=\frac{7}{xy(x-2)}$$

• الكسور المركبة Complex Fractions

يحتوى الكسر المركب على كسر أو أكثر فى أى من بسطه أو مقامه أو كليهما . لتبسيط الكسور المركبة :

الطريقة I :

- اختصر البسط والمقام إلى كسور بسيطة .
- اقسم الكسرين الناتجين .

مثال 2-37 :

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

الطريقة II :

- اضرب بسط ومقام الكسر المركب بالمضاعف المشترك الأصغر لكل مقامات الكسور فى الكسر المركب .
- اختصر الكسر الناتج إلى أقل حدود .

مثال 2-38 :

$$\frac{\frac{1}{x^2}-4}{\frac{1}{x}-2}=\frac{\left(\frac{1}{x^2}-4\right)x^2}{\left(\frac{1}{x}-2\right)x^2}=\frac{1-4x^2}{x-2x^2}=\frac{(1+2x)(1-2x)}{x(1-2x)}=\frac{1+2x}{x}$$

الفصل الثالث
الـــدوال
Functions

فى هذا الفصل :

- ✔ النسبة والتناسب والتغير .
- ✔ الدوال والرسوم البيانية .
- ✔ الدوال كثيرة الحدود .
- ✔ الدوال الكسرية .
- ✔ الكسور الجزئية .

• النسبة والتناسب والتغير

Ratio, Proportion, and Variation

النسبة Ratio

نسبة عددين a , b ونكتب a : b هى الكسر a/b بحيث $b \neq 0$. إذا كان $a = b \neq 0$ فتكون النسبة 1 : 1 أو $1/1 = 1$.

مثال 3-1 :

(أ) النسبة من 4 إلى 6 $= 4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(ب) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2/3}{4/5} = \frac{5}{6}$

(جـ) $5x : \frac{3y}{4} = \frac{5x}{3y/4} = \frac{20x}{3y}$

التناسب Proportion

التناسب هو تساوى نسبتين على ذلك a : b = c : d أو a/b = c/d يكونـــان تناسبًا وفيه يطلق على d , a النهايات وعلى b و c المتوسطات فى حيـن يطلق على d المتناسب الرابع لكل من a و b و c . فى التناسب a : b = b : c يطلق على c التناسب الثالث لكل من a و b . ويكون التناسب المتوسط لكل من a و c . التناسب هو معادلات ويمكن تحويلها باستخدام طـرق المعادلات المعروفة . تستخدم عادة بعض المعـادلات المعدلـة ويطلـق عليها قوانين التناسب . إذا كان a/b = c/d فيكون .

(1) $ad = bc$ (2) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (3) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (4) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(5) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (6) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

مثال 3-2 : أوجد النسبة لكل من الكميات التالية :

Example 3-2: Find the ratio of each of the following quantities:

(أ) 6 أرطال إلى 12 أوقية . (a) 6 pounds to 12 ounces.

من المعتاد التعبير على النســبة بنفس الوحـدات . وعلـى ذلـك نسبة 96 أوقية إلى 12 أوقية هى 96 : 12 = 8 : 1

(ب) 3 كورات إلى 2 جالون . (b) 3 quarts to 2 gallons.

النسبة المطلوبة 3 كورات إلى 8 كورات وهى 3 : 8 .

(جـ) 3 ياردة مربعة إلى 6 قدم مربع . (c) 3 square yards to 6 square feet.

نظرًا لأن 1 ياردة مربعة تساوى 9 قدم مربع فتكون النسبة المطلوبة $6\ ft^2 : 27\ ft^2$ أى 2 : 9 .

مثال 3-3 : قسم جزء من خط طوله .30 in إلى جزئين نسبة أطوالهما 2 : 3 . أوجد طول كل جزء .

Example 3-3: A line segment 30 inches long is divided into two parts whose lengths have the ratio 2:3. Find the lengths of the parts.

ليكن الأطوال المطلوبة x و (x - 30) وعلى ذلك

$$\frac{x}{30-x}=\frac{2}{3}$$

بالحل لـ x نجد

$30 - x = 18$ in. و $x = 12$in.

التغير Variation

عادة ـ عند قراءة المواد العلمية ـ ما تجد مثل هذه النصوص « يتغير ضغط الغاز المحصور طرديًا مع درجة الحرارة » . هذا ومع ما يشابهه من نصوص لها معنى رياضى دقيق ويمثل نوع معين من الدوال يطلق عليها دوال التغيير . الثلاث أنواع العامة لدوال التغير هم التغير الطردى والتغير العكسى والتغير المشترك .

(1) إذا تغير x **طرديًا** مع y فيكون $x = ky$. أو $x/y = k$ حيث يطلق على k ثابت التناسب أو ثابت التغير .

(2) إذا تغيرت x **طرديًا** مع y^2 فيكون $x = ky^2$.

(3) إذا تغيرت x **عكسيًا** مع y فيكون $x = k/y$.

(4) إذا تغيرت x **مشتركًا** مع y و z فيكون $x = kxz$.

(6) إذا تغيرت x **طرديًا** مع y^2 **وعكسيًا** مع z فيكون $x = ky^2/z$.

مثال 3-4 : طاقة الحركة E لجسم تتناسب مع وزنه W ومربع سرعته v . يتحرك جسم 8 lb بسرعة 4 ft/s وله طاقة حركة 2 ft.lb . أوجد طاقة حركة عربة 3 ton (6000 lb) عند سرعة 60 mi/hr (88 ft/s) .

Example 3-4: The kinetic energy E of a body is proportional to its weight W and to the square of its velocity v. An 8 lb body moving at 4 ft/sec has 2 ft-lb of kinetic energy. Find the kinetic energy of a 3 ton (6000 lb) trick speeding at 60 mi/hr (88 ft/sec).

لإيجاد k : $E = kWv^2$ أو

$$k=\frac{E}{Wv^2}=\frac{2\ \text{ft}-\text{lb}}{(8\ \text{lb})(4\ \text{ft/sec})^2}=\frac{1}{64}\sec^2$$

وعلى ذلك تكون طاقة حركة العربة .

$$E=\frac{Wv^2}{64\ \sec^2}=\frac{(6000\ \text{lb})(88\ \text{ft/sec})^2}{64\ \sec^{-2}}=726{,}000\ \text{ft}-\text{lb}$$

• الدوال والرسوم البيانية Functions and Graphs

المتغيرات Variables

المتغير هو رمز يمكنه افتراض أى قيمة من فئة القيم أثناء المناقشة .
الثابت هو رمز يظل ثابتًا على قيمة معينة واحدة أثناء المناقشة .

العلاقات Relations

العلاقة هى فئة من الأزواج المرتبة . يتكون الزوج المرتب من مركبتين أو إحداثيين يعرفا موضع نقطة بالإشارة إلى نقطة أصل . يمكن أن تحدد العلاقة بواسطة معادلة أو قاعدة أو جدول . يطلق على فئة المركبات الأولى للأزواج المرتبة **نطاق** العلاقة . يطلق على فئة المركبات الثانية **مدى** العلاقة .

مثال 3-5 : ما هو نطاق ومدى العلاقة :

$$\{(4, 12), (3, 9), (2, 6), (1, 3)\}$$

Example 3-5: What is the domain and range of the relation

$$\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$$

النطاق = $\{1, 2, 3, 4\}$ والمدى = $\{3, 6, 9, 12\}$

الدوال Functions

الدالة هى علاقة بحيث يكون لكل عنصر فى النطاق تزاوجًا بأحد عناصر المدى .

مثال 3-6 : أى من العلاقات الآتية يكون دالة :

Example 3-6: Which relations are functions?

(أ) $\{ (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) \}$ دالة لأن كل عنصر أول قد تزاوج تمامًا مع أحد العناصر الثانية .

(ب) $\{ (1, 2), (1, 3), (2, 8), (3, 9) \}$ ليست دالة لأن 1 قد تزاوج مع 2 ومع 3 .

(جـ) $\{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (9, 3) \}$ دالة لأن كل من العناصر الأولى قد تزاوج تمامًا مع واحد من العناصر الثانية .

عادة ما تعرف الدوال والعلاقات **بالمعادلات** عندما لا يحدد النطاق فنعين أكبر فئة فرعية للأرقام الحقيقية والتى تكون فيها المعادلة قد عرفت وتكون تلك هى النطاق . بمجرد تعيين النطاق نقوم بتعيين المدى بإيجاد قيم المعادلة لكل قيمة من النطاق .

نقطة مهمة

يطلق على المتغير المرتبط بالنطاق **المتغير المستقل** ويطلق على المتغير المرتبط بالمدى **المتغير التابع** . نفترض عمومًا فى المعادلة ذات المتغيرين y, x أن x متغيرًا مستقلاً و y متغيرًا تابعًا .

مثال 3-7 : ما هو النطاق والمدى لـ $y = x^2 + 2$

Example 3-7: What is the domain and range of $y = x^2 + 2$?

النطاق هو فئة كل الأعداد الحقيقية لأن مربع كل عدد حقيقى يكون عدداً حقيقيًا وأى عدد حقيقى زائد 2 يظل عدد حقيقيًا . فيكون النطاق = { كل الأعداد الحقيقية } .

المدى هو فئة كل الأعداد الحقيقية أكبر من أو تساوى 2 لأن مربع أى عد حقيقى سيكون على الأقل صفرًا . أيضًا كل رقم حقيقى أكبر من أو يساوى 2 يمثل بالصيغة $x^2 + 2$. على ذلك عند إضافة 2 لكل قيمة نحصل على كل الأعداد الحقيقية التى تكون على الأقل 2 . فيكون المدى = { كل الأعداد الحقيقية ≥ 2 }

مثال 3-8 : ما هو نطاق ومدى $y = 1/(x - 3)$ ؟

Example 3-8: What is the domain and range of $y = 1/(x - 3)$?

المعادلة غير معرفة عند $x = 3$ وعلى ذلك يكون النطاق هو فئة كل الأعداد الحقيقية التى لا تساوى 3 . النطاق = { الأعداد الحقيقية ≠ 3 } .

يصبح الكسر صفرًا عندما يكون البسط صفرًا ونظرًا لأن بسط هذا الكسر يكون مساويًا دائمًا 1 فلن يصبح هذا الكسر صفرًا . على ذلك يكون مدى هذه الفئة هو كل الأرقام الحقيقية التى لا تساوى صفرًا . المدى = { كل الأعداد الحقيقية ≠ 0 } .

صيغة الدالة Function Notation

تستخدم الصيغة $y = f(x)$ وتقرأ « y تساوى f لـ x » لتدل على كون y دالة لـ x . بهذه الصيغة $f(a)$ تمثل قيمة المتغير التابع y عند $x = a$ (بشرط أن تكون هناك قيمة) .

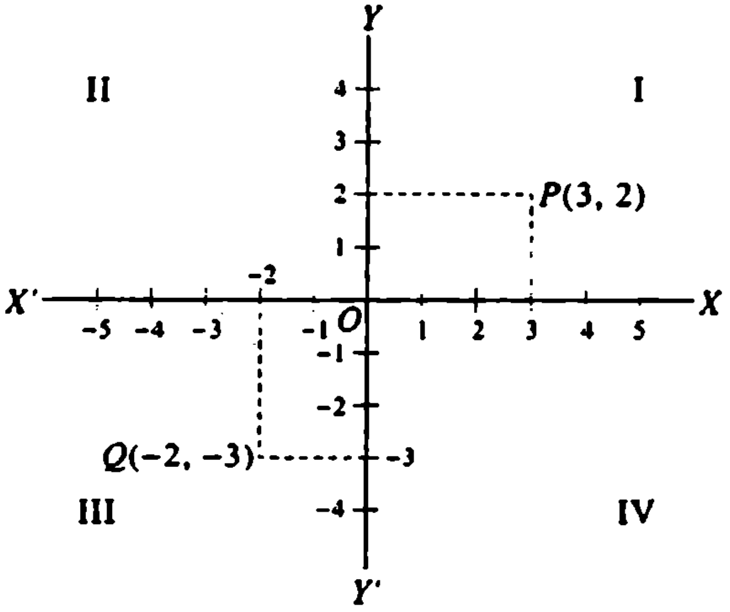
على ذلك $y = x^2 - 5x + 2$ يمكن كتابتها $f(x) = x^2 - 5x + 2$. ولذلك

تكـون $f(2)$ أى قيمـة $f(x)$ أو y عنـد $x = 2$ هـــى $f(2) = 2^2 - 5(2) + 2 = -4$.

وبالمثل $f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 2 = 8$.

يمكن استخدام أى حرف فى صيغة الدالــة ولذلـك $g(x)$ و $h(x)$ و $F(x)$ يمكن استخدامهم لتمثيل دوال x .

نظام الإحداثيات المتعامدة Rectangular Coordinate System



شكل 3-1

يستخدم **نظام الإحداثيات المتعـــامدة** لإعطـاء صـورة عـن العلاقـة بيـن متغيرين .

اعتبر الخطين المتعامدين معًا X'X و Y'Y والمتقاطعين فـى النقطـة O كما هو موضح بالشكل 3-1 .

الخط X'X ويطلق عليه محور x يكون عادة أفقيًا .

الخط Y'Y ويطلق عليه محور y يكون عادة رأسيًا .

يطلق على النقطة O نقطة الأصل .

باستخدام وحدة مناسبة للطول نوقع نقط على محور x عند وحدات متتالية يمين ويسار نقطة الأصل O مميزين النقط لجهة اليمين 1, 2, 3, 4, ... والنقطة لجهة اليسار 1-, 2-, 3-, 4-, ...

هنا اخترنا OX ليكون الاتجاه الموجب وهذا معتاد ولكن ليس لازمًا .

افعل نفس الشيء على محور y باختيار OY كاتجاه موجب . من المعتاد (وليس لازمًا) استخدام نفس وحدات الطول لكلا المحورين .

يقسم المحورين x , y المستوى إلى أربعة أجزاء تعرف بالأرباع ويشار إليهم I, II, III, IV كما فى الشكل 3-1 .

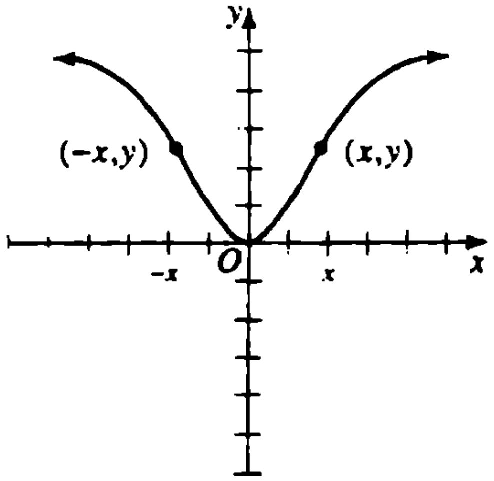
إذا أعطيت نقطة P فى المستوى xy هذا فاسقط عمودين من P إلى محور x ,y . قيم x و y عند تقاطع هذين العمودين مع محورى x و y تحدد على الترتيب **إحداثى** x للنقطة **وإحداثى** y للنقطة P . هذين الإحداثيين يشار إليهما بالرمز (x, y) .

وبالعكس إذا أعطيت إحداثيى نقطة يمكننا إيجاد أو توقيع النقطة فى المستوى xy . مثلاً النقطة P فى الشكل 3-1 لها إحداثيات (3, 2) والنقطة ذات الإحداثيات (3- ,2-) هى Q .

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ هى فئة كل النقط (x, y) التى تتحقق بالمعادلة $y = f(x)$.

التماثل Symmetry

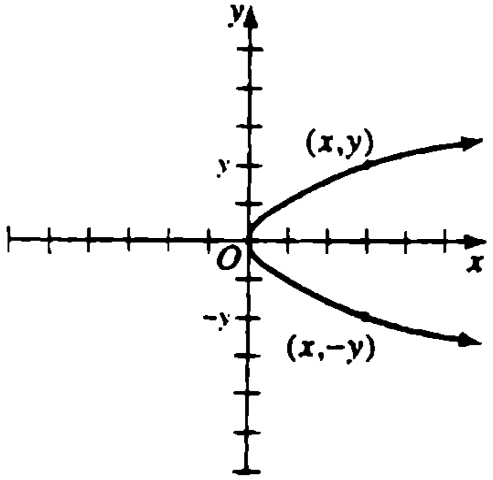
عندما يكون النصف اليسار لرسم بيانى هو صورة مرآة لنصفه اليمين فنقول أن الرسم البيانى متماثل بالنسبة لمحور y (انظر شكل 3-2) .



شكل 3-2

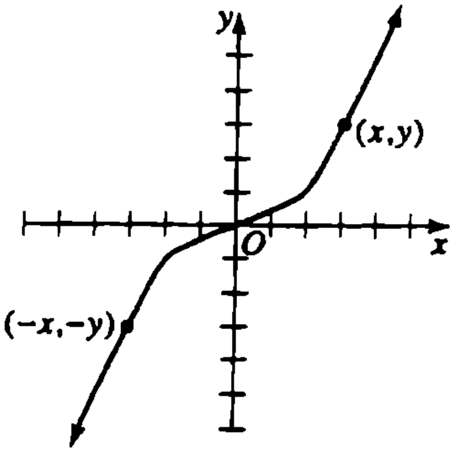
يحدث هذا التماثل لأنه لأى قيمة x ينتج عن كلاً من x, x- نفس قيمـة y أى f(x) = f(-x) . يمكن أن تكون المعادلة أو قد لا تكون دالة لـ f(x) بدلالة x .

بعض الرسوم البيانية لها النصف السفلى صورة مرآة للنصف العلوى ونقول أن لهذه الرسوم البيانية تماثلاً بالنسبة إلى محـور x . التمـاثل بالنسبة لمحور x ينتج عندما يكون لكل قيمة y كلا من y, y- ينتج عنه نفس قيمة x (انظر شكل 3-3) . فى هذه الحالات لا نحصل على دالة لـ y بدلالة x .



شكل 3-3

إذا عوضنا x- بدلاً من y, x- بدلاً من y في معادلـة مـا ونتـج عنـها معادلة مماثلة فنقول أن الرسم البيانى متماثلاً بالنسبة إلى نقطة الأصل (انظر شكل 3-4) . هذه المعادلات تمثل علاقات وليست دائمًا دوال .



شكل 3-4

يمكـن اسـتخدام التمـاثل لتسـهيل رسـم الرسـوم البيانيـة للعلاقـات والدوال . بمجرد معرفة نـوع التمـاثل ـ إذا وجـد وأمكـن تحديـد شكـل نصف الرسم البيانى فيمكن رسم النصف الآخر مسـتخدمًا هـذا التمـاثل . أغلب الرسوم البيانية غير متماثلة لمحور x ومحور y ونقطة الأصـل . إلا أنه كثيرًا من الرسوم البيانية المستخدمة عادة يكون لها أحد هذه الأنواع من التماثل واستخدام هذا التماثل عند رسم العلاقة يسهل عملية الرسم .

مثال 3-9 : اختبر العلاقة y = 1/x للتماثل .

Example 3-9: Test the relation y = 1/x for symmetry.

بالتعويض x- بدلاً من x نجد y = -1/x أى أن الرسم غير متماثل بالنسبة لمحور y .

بالتعويض y- بدلاً من y نجد y = -1/x أى أن الرسم غير متماثل بالنسبة لمحور x .

بالتعويض $-x$ بدلاً من x، $-y$ بدلاً من y نحصل على $-y = -1/x$ وهـي متنـاظرة مع $y = 1/x$ فيكون الرسم البيانى متماثلاً بالنسبة إلى نقطة الأصل .

الإزاحة Shifts

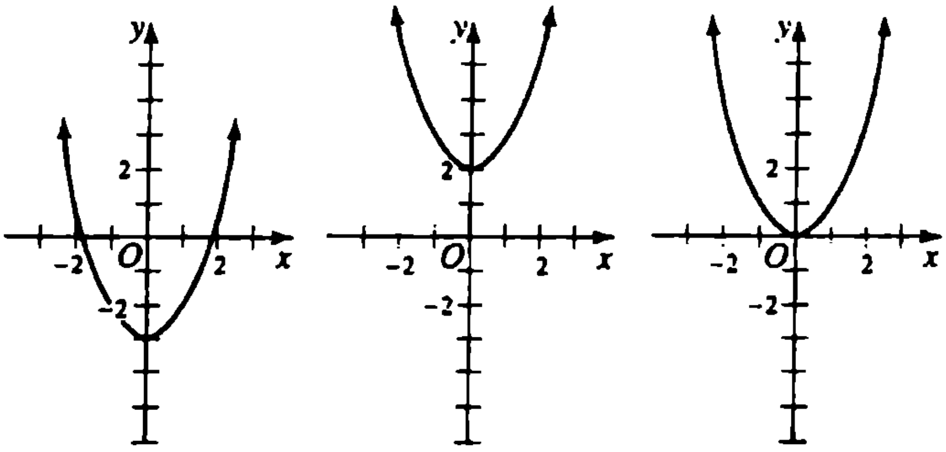
يزاح رسم $y= f(x)$ البيانى إلى أعلى بإضافة ثابت موجب إلى كل قيمة y فى الرسم البيانى . يزاح إلى أسفل بإضافة ثابت سالب لكل قيمـة y فى رسم $y = f(x)$ البيانى . على ذلك يختلف رسم $y = f(x) + b$ عن رسم $y = f(x)$ بانتقال رأسى مقداره $|b|$ من الوحدات . الإزاحة تكون لأعلى عند $b > 0$ والإزاحة تكون لأسفل عند $b < 0$.

مثال 3-10 : كيف تختلف الرسوم $y = x^2 + 2$ و $y = x^2 - 3$ البيانية عن رسم $y =x^2$ البيانى .

Example 3-10: How do the graphs of $y = x^2 + 2$ and $y = x^2 - 3$ differ from the graph of $y = x^2$?

رسم $y = x^2$ البيانى يزاح لأعلى 2 وحدتين لنحصل على رسم $y = x^2 + 2$ البيانى . (انظر شكل 3-5 (a) و 3-5(b)) .

رسم $y = x^2$ البيانى يزاح لأسفل 3 وحدات لنحصل على رسم $y = x^2 - 3$ البيانى . (انظر شكل 3-5 (a) و 3-5(c)) .



(c) $y = x^2 - 3$　　(b) $y = x^2 + 2$　　(a) $y = x^2$

شكل 3-5

يزاح رسم $y = f(x)$ البيانى إلى اليمين عند طرح عــدد موجــب مـن كل قيمة x . يزاح إلى اليسار إذا طرح عدد سالب من كـل قيمـة x . على ذلك رسم $y = f(x - a)$ البيانى يختلـف عـن رسـم $y = f(x)$ البيـانى بإزاحة أفقية $|a|$ من الوحدات . الإزاحة تكون لجهة اليمين إذا كانت $a > 0$ والإزاحة تكون إلى اليسار إذا كانت $a < 0$.

مثال 3-11 : كيف تختلف رسوم $y = (x + 1)^2$ و $y = (x - 2)^2$ البيانية عـن رسم $y = x^2$ البيانى .

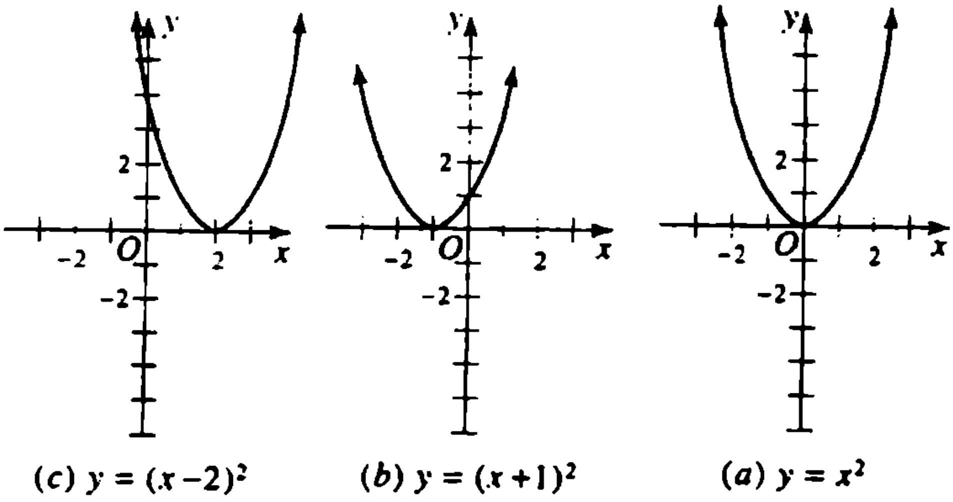
Example 3-11: How do the graphs of $y = (x + 1)^2$ and $y = (x - 2)^2$ differ from the graph of $y = x^2$?

يزاح رسم $y = x^2$ البيــانى 1 وحـدة لجهـة اليســار لنحصـل علـى رسـم $y = (x + 1)^2$ البيانى . لأن $x + 1 = x - (-1)$

(انظر شكل 3-6(a) و 3-6(b)) .

يزاح رسم $y = x^2$ البيــانى 2 وحـدة لجهـة اليميـن لنحصـل علـى رسـم $y = (x - 2)^2$ البيانى .

(انظر شكل 3-6(a) و 3-6(c)) .



شكل 3-6

تغيير القياس Scaling

إذا ضربت كل قيمة y بعدد موجب أكبر من 1 فإن معدل تغير y يـزداد عن معدل تغير قيمة y فى $y = f(x)$. إلا أنـه إذا ضربـت كـل قيمـة y بعدد موجب بين 0 و 1 فإن معدل تغير قيمة y تقـل عـن معـدل تغـير قيمة y فى $y = f(x)$. على ذلك يختلف رسم $y = cf(x)$ البيانى ـ حيث c عدد موجب ـ عن رسم $y = f(x)$ البيانى فى معـدل الزيـادة فـى y . إذا كانت $c > 1$ فيزداد معدل تغير y وإذا كانت $0 < c < 1$ فإن معدل التغير فى y يتناقص .

ينعكس رسم $y = f(x)$ البيانى على محور x عند ضـرب كـل قيمـة y بعدد سالب . على ذلك $y = cf(x)$ البيـانى حيـث $c < 0$ هـو انعكـاس $y = |c|f(x)$ على محور x .

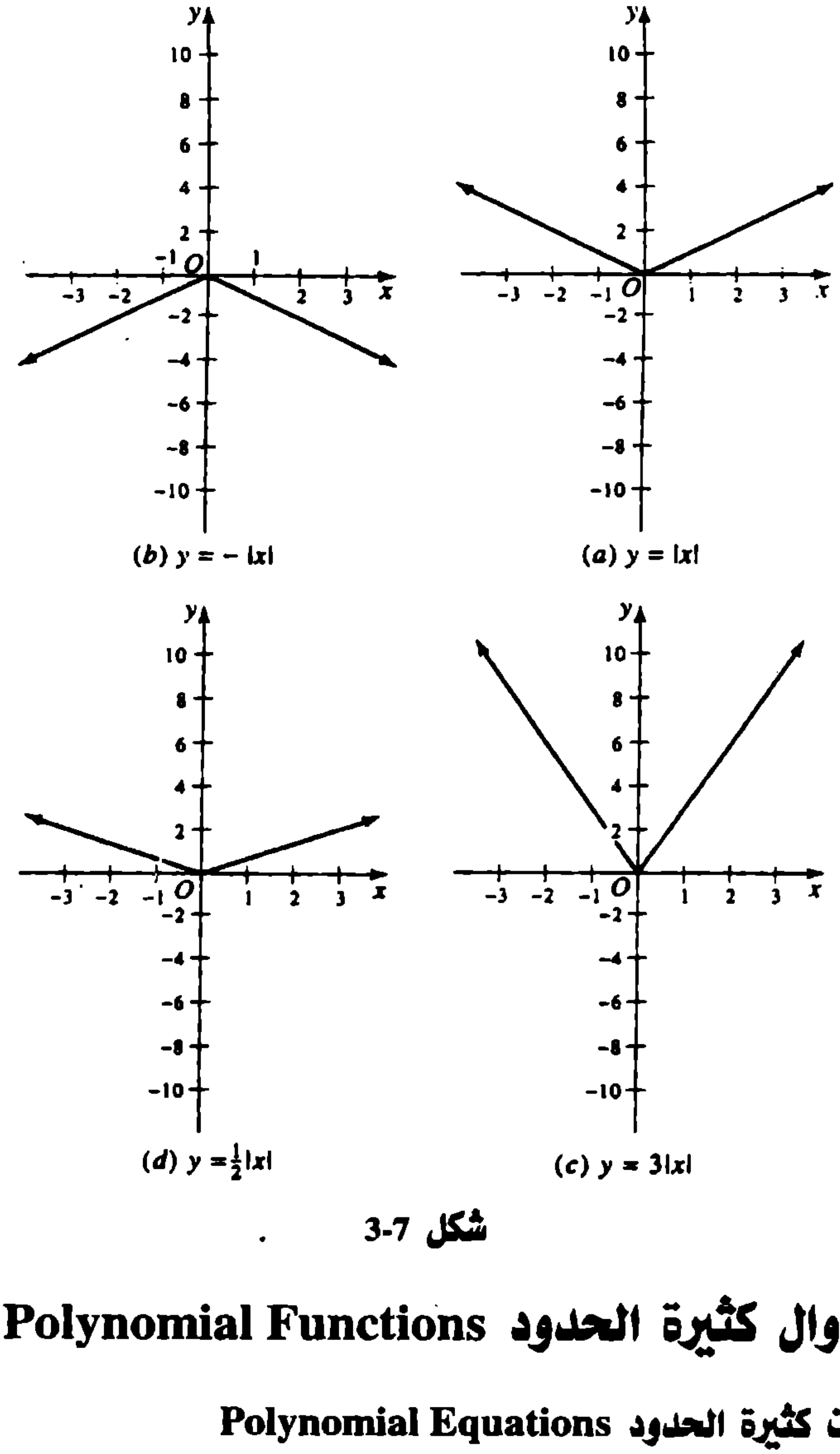
مثال 3-12 : كيـف تخـتـلف رسـوم $y = -|x|$ و $y = 3|x|$ و $y = \frac{1}{2}|x|$ البيانية عن رسم $y = |x|$ البيانى .

Example 3-12: How do the graphs of $y = -|x|$, and $y = 1/2|x|$ differ from the graph of $y = |x|$?

ينعكـس رسـم $y = |x|$ البيـانى علـى محـور x ليعطـى $y = -|x|$ (انظر شكل 3-7(a) ، 3-7(b)) .

يؤدى رسم $y = |x|$ البيانى عند ضرب كل قيمة y بـ 3 لكل قيمة لـ x إلى رسم $y = 3|x|$ البيانى (انظر شكل 3-7(a) ، 3-7(c)) .

يؤدى رسم $y = |x|$ البيانى عند ضرب كل قيمة y بـ $\frac{1}{2}$ لكل قيمة لـ x إلى رسم $y = \frac{1}{2}|x|$ البيانى (انظر شكل 3-7(a) ، 3-7(d)) .



شكل 3-7

• الدوال كثيرة الحدود Polynomial Functions

المعادلات كثيرة الحدود Polynomial Equations

المعادلات الكسرية الصحيحة من الدرجة n فى المتغـير x هـى معادلـة

يمكن كتابتها بالشكل الآتى :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \;\; a_n \neq 0$$

حيث n عدد صحيح موجب و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت . معامل حد أكبر درجة يطلق عليه المعامل المتقدم ويطلق على a_0 الحد الثابت .

على ذلك يكون $4x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$ و $x^2 - \sqrt{2}\,x + 1/4 = 0$ و $x^4 + \sqrt{-3}\,x - 8 = 0$ معاملات كسرية صحيحة فى x من الدرجة 3 ، 2 ، 4 على الترتيب . لاحظ أنه فى كل معادلة كانت أسس x قيم موجبة صحيحة والمعاملات ثوابت حقيقية (أو مركبة) .

كثيرة الحدود من درجة n فى المتغير x تكون دالة لـ x ويمكن كتابتها فى الصورة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

حيث n عدد صحيح موجب و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت .

فتكون $P(x) = 0$ هى معادلة كسرية صحيحة من الدرجة n فى x .

إذا كانت : $P(x) = 3x^3 + x^3 + 5x - 6$

فتكون : $P(-2) = 3(-2)^3 + (-2)^2 + 5(-2) - 6 = -36$

إذا كانت $P(X) = x^2 + 2x - 8$

فتكون : $P(\sqrt{5}) = 5 + 2\sqrt{5} - 8 = 2\sqrt{5} - 3$

يطلق على أى قيمة x والتى تجعل P(x) يتلاشى جذر المعادلة $P(x) = 0$

على ذلك تكون 2 هى جذر المعادلة $P(x) = 3x^3 + x^3 + 5x - 6$ لأن

$P(2) = 24 - 8 - 10 - 6 = 0$

أصفار المعادلات كثيرة الحدود Zeroes of Polynomial Equations

نظرية الباقى : إذا كان r أى ثابت وإذا قسمت كثيرة الحدود $P(x)$ على $(x - r)$ كان الباقى $P(r)$.

فمثلاً إذا قسمت $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 8$ على $(x + 1)$ فتكون $r = -1$ والباقى يساوى $P(-1) = -2 - 3 + 1 + 8 = 4$.

$$\frac{2x^3-3x^2-x+8}{x+1}=Q(x)+\frac{4}{x+1}$$

حيث $Q(x)$ كثيرة الحدود فى x .

نظرية العامل : إذا كان r جذراً للمعادلة $P(x) = 0$ أى $P(r) = 0$ فيكون $(x - r)$ عاملاً فى $P(x)$. وبالعكس إذا كان $(x - r)$ عاملاً فى $P(x)$ يكون r جذراً للمعادلة $P(x) = 0$ أو $P(r) = 0$. على ذلك يكون 1 ، -2 ، -3 ثلاثة جذور للمعادلة $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ نظراً لأن $P(1) = P(-2) = P(-3) = 0$. فتكون $(x - 1)$ و $(x + 2)$ و $(x + 3)$ عواملاً فى $x^3 + 4x^2 + x - 6$.

القسمة التركيبية : القسمة التركيبية هى طريقة مبسطة لقسمة كثيرة الحدود $P(x)$ على $(x - r)$ حيث r أى عدد معطى . بهذه الطريقة تعين قيم معاملات خارج القسمة كما تعين قيمة الباقى .

مثال 3-13 : اقسم $(5x + x^4 - 14x^2)$ على $(x + 4)$ باستخدام القسمة التركيبية .

Example 3-13: Divide $(5x + x^4 - 14x^2)$ by $(x + 4)$ using synthetic division

اكتب حدود المقسوم حسب القوة التنازلية للمتغيرات مع ملء الحدود المفقودة باستخدام الصفر بمعاملاتها . اكتب المقسوم عليه بصورة x - a .

$$(x^4 + 0x^3 - 14x^2 + 5x + 0) \div (x - (-4))$$

اكتب الحد الثابت a للمقسوم عليه على اليسار فى علامة |__ واكتب معاملات المقسوم يمين هذه العلامة .

$$-4| \quad 1 + 0 - 14 + 5 + 0$$

احضر الحد الأول فى المقسوم إلى الصف الثالث تاركًا صفًا خاليًا الآن .

$$-4| \quad 1 + 0 - 14 + 5 + 0$$

$$\overline{1}$$

اضرب الحد فى صف خارج القسمة (الصف الثالث) بالمقسوم عليه واكتب حاصل الضرب فى الصف الثانى أسفل الحد الثانى فى الصف الأول . اجمع الأعداد فى العمود الذى تكون واكتب المجموع كحدًا ثانيًا فى صف خارج القسمة .

$$-4| \quad 1 + 0 - 14 + 5 + 0$$

$$\underline{-4}$$

$$1 - 4$$

اضرب الحد الأخير على اليمين فى صف خارج القسمة فى المقسوم عليه واكتب الناتج تحت الحد التالى من الصف الأعلى ثم اجمع واكتب المجموع فى صف خارج القسمة . كرر هذه العملية حتى يكون لكل حد فى الصف العلوى رقمًا تحته .

$$-4| \quad 1 + 0 - 14 + 5 + 0$$

$$\underline{-4 + 16 - 8 + 12}$$

$$1 - 4 + 2 - 3 + 12$$

الصف الثالث هو صف خارج القسمة والحد الأخير فيه يكون الباقى .

درجة كثيرة حدود خارج القسمة تكون أقل بواحد عن درجة المقسوم لأننا نقسم على عاملاً خطيًا . الحدود فى صف خارج القسمة تكون معاملات الحدود فى كثيرة حدود خارج القسمة . درجة كثيرة حدود خارج القسمة هنا هى 3 .

خارج القسمة والباقى من $(x^4 + 0x^3 - 14x^2 + 5x + 0) \div (x - (-4))$ هى

$$1x^3 - 4x^2 + 2x - 3 + \frac{12}{x+4}$$

النظرية الأساسية للجبر : يكون لكل معادلة كثيرة الحدود $P(x) = 0$ على الأقل جذراً واحدًا حقيقيًا أو مركبًا .

وعلى ذلك $x^7 - 3x^5 + 2 = 0$ لها على الأقل جذراً واحدًا .

أما $f(x) = \sqrt{x} + 3 = 0$ فليس لها جذور نظرًا لعدم وجود عدد r بحيث $f(r) = 0$. نظرًا لأن هذه المعادلة ليست كسرية فلا تنطبق هنا النظرية الأساسية .

عدد جذور معادلة : كل معادلة كسرية صحيحة $P(x) = 0$ من الدرجة n لها n من الجذور تمامًا .

على ذلك $2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 = 0$ لها بالضبط 3 جذور وهم 2 , -1/2 , -4

يمكن أن تكون بعض الجذور متساوية .

على ذلك فالمعادلة من الدرجة السادسة $(x - 2)^3(x - 5)^2(x + 4) = 0$ لها 2 كجذر ثلاثى و 5 كجذر مزدوج و 4- كجذر مفرد . أى أن الستة جذور هى 2 ,2 ,2 ,5 ,5 ,4- .

حل معادلات كثيرة الحدود Solving Polynomial Equations

الجذور المركبة والغير كسرية

(1) إذا كان العدد المركب $a + bi$ جذراً للمعادلة كثيرة الحدود الكسرية الصحيحة $P(x) = 0$ ذات **المعاملات الحقيقية** فيكون الرقم المركب المرافق $a - bi$ جذراً أيضًا يلى ذلك أن كل معادلة كسرية صحيحة ذات درجة فردية ومعاملاتها صحيحة يكون لها على الأقل جذراً واحداً حقيقيًا .

(2) إذا كان للمعادلة الكسرية الصحيحة $P(x) = 0$ ذات **المعاملات الكسرية** جذراً $a+\sqrt{b}$ حيث a و b كسريين و $\sqrt{b}$ غير كسرى فيكون $a-\sqrt{b}$ جذراً أيضًا .

نظرية الجذور غير الكسرية : إذا كان b/c كسراً كسريًا فى أدنى حدوده ـ جذرا للمعادلة

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \ a_n \neq 0$$

ذات المعاملات الصحيحة فيكون b عاملاً لـ a_0 و c عاملاً لـ a_n . على ذلك إذا كان b/c جذراً كسريًا لـ $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$ فتكون قيم b محدودة بعوامل 2 وهم ±1 ، ±2 وتكون قيم c محدودة بعوامل 6 وهم ±1 ، ±2 ، ±3 ، ±6 . على ذلك تكون الجذور الكسرية الوحيدة هى ±1 ، ±2 ، ±1/2 ، ±1/3 ، ±1/6 ، ±2/3 .

نظرية الجذور الصحيحة : يلى ذلك أنه إذا كانت المعادلة $P(x) = 0$ ذات معاملات صحيحة وكان المعامل المتقدم 1 :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

فتكـون الجـذور الكسـرية لــ $P(x) = 0$ أعـداد صحيحـة وعوامــل لـ a_0 . على ذلك تكون الجذور الكسرية ـ إذا وجــدت ـ للمعادلـة $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ محدودة بمعاملات 12 الصحيحة وهــى ±1 ، ±2 ، ±3 ، ±4 ، ±6 ، ±12 .

لاحـظ

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $P(x) = 0$ معادلة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية فيمكــن إيجاد القيم التقريبية للجـذور الحقيقيـة لــ $P(x) = 0$ بإيجـاد الرسـم البيانى لـ $y = P(x)$ وتحديد قيم x عند نقطة تقاطع الرســم البيــانى مع محور x $(y = 0)$. المهم فى هذا هو الحقيقــة أنـه إذا كـان لــ $P(a)$ و $P(b)$ إشارات مختلفة فيكون لـ $P(x) = 0$ جذرًا واحدًا علـى الأقـل بيـن $x = a$ و $x = b$. هذه الحقيقة تعتمـد علـى اتصـال الرسـم البيـانى لــ $y = P(x)$ عندما يكون $P(x)$ كثير الحدود ذى معاملات حقيقية .

مثال 3-14 : لكل صفر حقيقى لـ $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 4$ اعزل الصفر بين رقمين صحيحين متتاليين .

Example 3-14: For each real zero of $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 4$. isolate the zero between two consecutive integers.

نظرًا لأن درجة $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 4$ هى 3 فيكون هناك على الأكثر ثـلاث أصفار حقيقية . سنبحث عـن الأصفـار الحقيقية فـى الفترة 5- إلى 5 . الفــترة اختياريـة وقـد تحتـاج إلـى امتدادهـا إذا لـم نوجـد الأصفار فى هذه الفترة . بالقسمة التركيبية سنوجد قيم $P(x)$ لكل عـدد صحيح فى الفترة المختارة . البواقى من القسمة التركيبية هى قيــم $P(x)$ وقد لخصت فى الجدول التالى .

x	- 5	- 4	- 3	- 2	-1	0	1	2	3	4	5
P(x)	-341	-180	-77	-20	3	4	-5	-12	-5	28	99

لاحظ أن $P(-2) = -20$ وأن $P(-1) = 3$ لهما إشارتان مختلفتان فمن نظرية القيمة المتوسطة يكون هناك صفر حقيقى بين 2- و 1- بالمثل نظرًا لأن $P(0) = 4$ و $P(1) = -5$ سيكون هناك صفرًا حقيقيًا بين 0 و 1 ونظرًا لأن $P(3) = -5$ و $P(4) = 28$ فيكون هناك صفر حقيقى بين 3 و 4 . تم عزل ثلاث أصفار حقيقية وبذلك نكون قد عينا كل الأصفار الحقيقية لـ $P(x)$.

الحدود العليا والدنيا للجذور الحقيقية . يطلق على العدد a **الحد الأعلى** أو **القيد الأعلى** لجذور $P(x) = 0$ الحقيقية إذا كان لا توجد جذور أكبر من a . يطلق على العدد b **الحد الأدنى** أو **القيد الأدنى** لجذور $P(x) = 0$ الحقيقية إذا كان لا يوجد جذور أقل من b . النظرية التالية مفيدة عند إيجاد الحدود العليا والحدود الدنيا .

ليكن $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$ حيث $a_0, a_1, \ldots,$ حقيقية و $a_n > 0$ فنجد :

- إذا كان عند القسمة التركيبية لـ $P(x)$ على $x - a$ حيث $a \geq 0$ كل الأعداد التى نحصل عليها فى الصف الثالث موجبة أو صفر فتكون a حدًا أعلى لكل الجذور الحقيقية لـ $P(x) = 0$.
- إذا كان عند القسمة التركيبية لـ $P(x)$ على $x - b$ حيث $b \leq 0$ كل الأعداد التى تحصل عليها فى الصف الثالث تتبادل الموجب والسالب (أو الصفر) فتكون b الحد الأدنى لكل الجذور الحقيقية لـ $P(x) = 0$.

مثال 3-15 : أوجد الفترة التى تحتوى على كل أصفار $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$ الحقيقية .

Example 3-15: Find an interval that contains all the real zeros of $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

سنوجد العدد الصحيح b الـذى يمثـل أقـل حـد أعلـى لأصفـار P(x) الحقيقية والعدد الصحيح a الذى يمثل أكـبر حـد أدنـى لأصفـار P(x) الحقيقية . كل الأصفار الحقيقية ستقع فى الفترة [a, b] . لإيجـاد a و b سنستخدم القسمة التركيبية على $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

$\underline{1}\vert$	2 - 5 + 0 + 6	$\underline{2}\vert$	2 - 5 + 0 + 6	$\underline{3}\vert$	2 - 5 + 0 + 6
	+ 2 - 3 - 3		+ 4 - 2 - 4		+ 6 + 3 + 9
	2 - 3 - 3 + 3		2 - 2 - 2 + 2		2 + 1 + 3 + 15

عندما نقسم باستخدام 3 يكون صف خارج القسمة كلها موجبة فيكون 3 هـى أصغـر عـدد صحيح للحـد الأعلى للأصفار الحقيقية لـ P(x) . على لك تكون b = 3 .

$\underline{-1}\vert$	2 - 5 + 0 + 6
	- 2 + 7 - 7
	2 - 7 + 7 - 1

عند القسمة باستخدام 1- فيتبادل صف خـارج القسـمة فـى الإشـارات وتكون 1- هو أكبر رقم صحيح للحد الأدنى للأصفار الحقيقية لـ P(x) على ذلك a = -1 .

تكون أصفاراً $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$ الحقيقية فى الفترة (3 ,1-) أو $-1 < x < 3$. نظرا لأن $P(-1) \neq 0$ و $P(3) \neq 0$ فقد اسـتخدمنا رمـز الفـترة الذى يدل على كلا النهايتين ليست أصفاراً لكثيرة الحدود .

قاعدة ديكارت للإشارات . إذا رتبـت حـدود كثـــيرة الحـــدود P(x) ذات

المعاملات الحقيقية بترتيب قوى x التنازلية فيحدث تغير فى الإشارة عندما تتغير إشارة حدين متتالين . فمثلاً . $x^3 - 2x^2 + 3x - 12$ لها 3 تغـيرات فـى الإشارة و $2x^7 - 6x^5 - 4x^4 + x^2 - 2x + 4$ لها 4 تغيرات فى الإشارة .

تقول قاعدة ديكارت للإشارات أن عدد الجذور الموجبة لـ $P(x) = 0$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجى . عدد الجـذور السـالبة لــ $P(x) = 0$ إما أن تساوى عدد التغيرات فى إشارة $P(-x)$ أو أقل عن هذا العدد بعدد صحيح موجب .

بناءً على ذلك فيكون فى $P(x) = x^9 - 2x^5 + 2x^2 - 3x + 12 = 0$ عـدد 4 تغيرات فى الإشارة $P(x)$. على ذلك يكون عـدد الجـذور الموجبـة لــ $P(x) = 0$ هو 4 أو $(4 - 2)$ أو $(4 - 4)$. ولأن

$$P(-x) = (-x)^9 - 2(-x)^5 + 2(-x)^2 - 3(-x) + 12$$
$$= -x^9 + 2x^5 + 2x^2 + 3x + 12 = 0$$

لها تغير واحد فى الإشارة فيكون $P(x) = 0$ لـه بـالضبط جـذر سـالب واحد . لذلك هناك 4 أو 2 أو 0 جذر موجب و 1 جذر سالب وعلـى الأقل $9 - (4 + 1) = 4$ جذر مركب .

تقريب الأصفار الحقيقية Approximating Real Zeros

عند حل المعادلة كثيرة الحدود $P(x) = 0$ لا يكـون فـى الإمكـان دائمًـا إيجاد كل الأصفار بالطرق السابقة . نكون قادرين على تعييـن الأصفـار المركبة والغير كسرية عندما نستطيع إيجاد عوامل تربيعية يمكـن حلـها باستخدام قانون المعادلات التربيعية (انظر فصـل 5) . إذا لـم نسـتطع إيجاد العوامل التربيعية لـ $P(x) = 0$ فلن نستطيع الحل للأصفار التخيليـة . ولكن عادة ما يمكن إيجاد تقريبًا لبعض الأصفار الحقيقية .

لتقريب صفر حقيقى لـ $P(x) = 0$ يجب أولاً إيجاد الفترة المحتوية على صفر حقيقى لـ $P(x) = 0$. يمكن عمل ذلك باستخدام نظرية القسمة المتوسطة لتحديد العددين a ، b بحيث تكون إشارة P(a) مختلفة عن إشارة P(b) . نستمر فى استخدام نظرية القيمة المتوسطة حتى نعزل الصفر الحقيقى فى فترة صغيرة بدرجة تسمح بتحديد الصفر للدرجة المطلوبة من الدقة .

مثال 3-16 : أوجد الصفر الحقيقى للمعادلة : $x^3 + 3x + 8 = 0$ صحيحًا لرقمين عشريين .

Example 3-16: Find a real zero of $x^3 + 3x + 8 = 0$ correct to two decimal places.

باستخدام قاعدة ديكارت للإشارات فلا يكون $P(x) = x^3 + 3x + 8$ لـها أصفار حقيقية موجبة و 1 صفر سالب حقيقى .

باستخدام القسمة التركيبية نوجد $P(-2) = -6$ و $P(-1) = 4$ فيكون باستخدام نظرية القيمة المتوسط $P(x) = x^3 + 3x + 8$ لها صفر حقيقى بين 2- و 1- . نستخدم الآن القسمة التركيبية ونظرية القيمة المتوسطة لإيجاد فترة العشرات المحتوية على الصفر . لخصت النتائج فى الجدول التالى :

x	- 1.0	- 1.1	- 1.2	- 1.3	- 1.4	- 1.5
P(x)	4	3.37	2.67	1.90	1.06	1.13

- 1.6	- 1.7	- 1.8	- 1.9	- 2.0
- 0.80	- 2.01	- 3.23	- 4.56	- 6

نرى أن P(-1.5) موجبة و P(-1.6) سالبة فيكون الصفر بين 1.6- و 1.5- .
نختبر الآن الرقم المئوى باستخدام القسمة التركيبية على الفترة 1.6- و

-1.5 . لا نحتاج إلى كل قيم المئــات ولكــن تغـير الإشـارة فقـط بيــن قيمتين متتاليتين .

x	- 1.50	- 1.51	- 1.52
P(x)	0.13	0.03	- 0.07

نرى أن P(-1.51) موجب و P(-1.52) سالب فيكون باستخدام نظرية القيمة المتوسطة صفـر حقيقى بيــن -1.51 و -1.52 . نظـرًا لأن الصفر الحقيقى يقع بين -1.51 و -1.52 نحتاج فقط إلى تعيين هل تقرب إلـى -1.51 أو -1.52 . لأجل ذلك نوجد P(-1.515) وهى حوالــى -0.02 . هـذه القيمـة لـ P(-1.515) سالبة و P(-1.51) موجبة فنعلم أن الصفر يقــع بيــن -1.515 و -1.510 وكل الأعداد فـــى هـذه الفـترة عنـد تقريبـها لأقـرب رقميــن عشريين تكـون -1.51 . بـذلك يكـون ـ لأقـرب رقمين عشرين ـ الصفر الحقيقى الوحيد لـ $x^3 + 3x + 8 = 0$ هو -1.51 .

• الدوال الكسرية Rational Functions

الدوال الكسرية Rational Functions

الـدالة الكسرية هـى نسبة بين دالتين كثيرتى الحدود . إذا كان P(x) و Q(x) كثيرتى فى حدود فتكون الدالــة بـالشكل $R(x) = P(x)/Q(x)$ دالـة كسرية حيث $Q(x) \neq 0$. نطاق R(x) هو تقاطع نطاقى P(x) و Q(x) .

الخطوط المقاربة الرأسية Vertical Asymptotes

إذا كان $R(x) = P(x)/Q(x)$ فتكــون قيـم x التـى تجعـل $Q(x) = 0$ تنتـج خطوطًا مقاربة رأسية إذا كـانت $P(x) \neq 0$. إلا أنـه إذا وجـدت قيمـة

معينة $x = a$ بحيث $P(x) = 0$ و $Q(x) = 0$ فيكون $(x - a)$ عـاملاً مشتركًـا لكل من $P(x)$ و $Q(x)$. إذا خفضت $R(x)$ لأقـل حـدود فيكـون الرسـم البيانى لـ $R(x)$ له ثقب عند $x = a$.

الخط المقارب الرأسى لـ $R(x)$ هو خط رأسى $x = k$ حيـث k ثـابت ورسم $R(x)$ البيانى يقترب ولا يلامس الخط المقارب . $R(k)$ غير معرف لأن $Q(k) = 0$ و $P(k) \neq 0$. نطـاق $R(x)$ ينفصـل إلـى فـترتين محددتيـن بالخطوط المقاربة لـ $R(x)$.

مثال 3-17 : ما هى الخطوط المقاربة لـ

Example 3-17: What are the vertical asymptotes of

$$R(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 4}$$

نظرًا لأن $R(x)$ غير معرفة عند $x^2 - 4 = 0$ فيمكن أن ينتج عنـد $x = 2$ و $x = -2$ خطين مقاربين رأسيين . عند $x = 2$ يكون $2x - 3 \neq 0$ وعند $x = -2$ يكون $2x - 3 \neq 0$. لذلك يكون لرسم $R(x)$ البيانى خطين مقـاربين عنـد $x = 2$ و $x = -2$.

الخطوط المقاربة الأفقية Horizontal Asymptotes

يكون للدالة الكسرية $R(x) = P(x)/Q(x)$ مقاربًا أفقيًـا $y = a$ إذا اقـتربت $R(x)$ إلى القيمة a عند ازدياد $|x|$ بدون حدود . يكون لـ $R(x)$ علـى الأقل مقاربًا أفقيًا واحدًا . يمكن إيجاد المقارب الأفقى لـــ $R(x)$ مـن مقارنة درجة $P(x)$ ودرجة $Q(x)$.

- إذا كانت درجة $P(x)$ أقل من درجة $Q(x)$ فيكون $R(x)$ له مقاربًا أفقيًا عند $y = 0$.

• إذا ساوت درجة P(x) درجة R(x) فيكون R(x) له مقاربًا أفقية عند $y = a_n/b_n$ حيث a_n المعامل المتقدم (معامل حد أكبر درجة) لـ P(x) و b_n معامل Q(x) المتقدم .

• إذا كانت درجة P(x) أكبر من درجة Q(x) فلا يكون لـ R(x) مقاربًا أفقيًا .

يمكن لرسم R(x) البياني أن يقطع الخط المقارب الأفقى فى داخل نطاقه . يكون هذا ممكنا نظرًا لاهتمامنا فقط بسلوك R(x) عند زيادة |x| بدون حد حتى يمكن تحديد المقارب الأفقى .

مثال 3-18 : ما هى الخطوط المقاربة الأفقية لكل دالة أفقية R(x) ؟

Example 3-18: What are the horizontal asymptotes of each rational function R(x)?

$$(a)\ R(x)=\frac{3x^3}{x^2-1};\ (b)\ R(x)=\frac{x}{x^2-4};\ (c)\ R(x)=\frac{2x+1}{3+5x}$$

(أ) درجة البسط $3x^3$ هى درجة 3 ودرجة المقام هى 2 . نظرًا لأن درجة البسط تعلو درجة المقام فلا يكون لـ R(x) خط مقارب أفقى .

(ب) درجة البسط 1 ودرجة المقام 2 فيكون لـ R(x) خط مقارب عند $y = 0$.

(جـ) درجة كلاً من البسط والمقام 1 ونظرًا لأن معاملى البسط المتقدم 2 ومعامل المقام المتقدم 5 فيكون لـ R(x) خط مقارب أفقى عند $y = 2/5$.

رسم الدوال الكسرية بيانيًا Graphing Rational Functions

لرسم الدالة الكسرية $R(x) = P(x)/Q(x)$ بيانيًا تحدد أولاً الثقوب وهى قيم x التى يكون عندها كل من P(x) و Q(x) صفرًا . بعد تحديد الثقوب

نقوم بتخفيض درجة R(x) إلى أقل حدود . قيمة R(x) بالصيغة المخفضة عند x المناظرة لثقب تعطى إحداثى y للنقطة المناظرة للثقب .

طالما كانت R(x) فى أدنى حدودها نعين كل من الخطوط المقاربة والتماثل والأصفار والجزء المحصور من y إذا وجدوا . ترسم الخطوط المقاربة بخطوط متقطعة ونوقع الأصفار والجزء المحصور من y ونوقع عدداً من النقط الأخرى لإيجاد كيفية اقتراب الرسم البيانى من الخطوط المقاربة . أخيرًا نرسم الرسم البيانى خلال النقط الموقعة ومقتربة من خطوط التقارب .

مثال 3-19 : ارسم رسمًا بيانيًا للدالة الكسرية

Example 3-19: Sketch a graph of the rational function.

$$R(x)=\frac{3}{x^2-1}$$

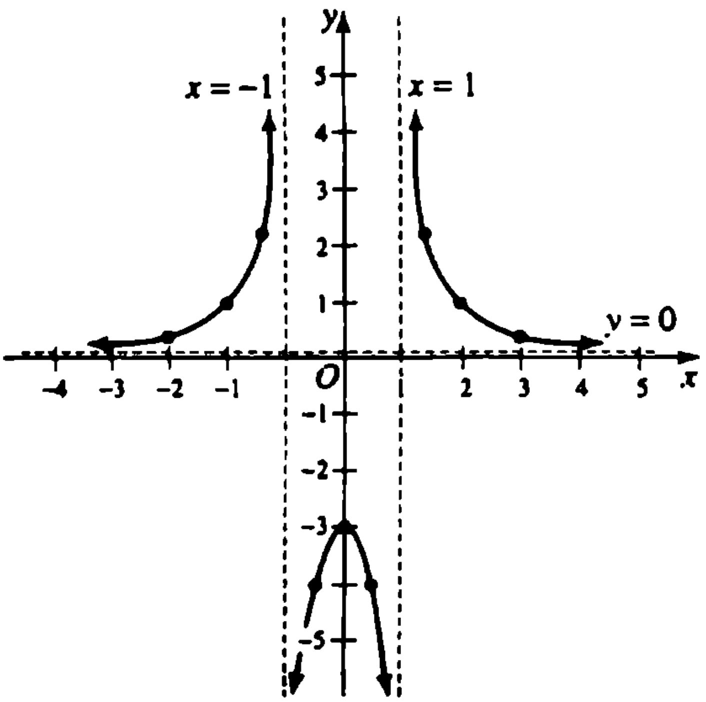
R(x) لها خطى مقاربة رأسيين عند $x = 1$ و $x = -1$ وخط مقاربة أفقى عند $y = 0$ وليس له ثقوب نظرًا لأن بسط R(x) ثابتًا فلا يكون أصفار . نظرًا لأن $R(0) = 3$ فيكون الجزء المحصور من y هو $(0, -3)$.

وقع الجزء المحصور من y وارسم خطوط المقاربة بخطوط متقطعة . نعين بعض قيم R(x) فى كل فترة من النطاق $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(1, \infty)$. $R(-x) = R(x)$ فيكون R(x) متماثلاً بالنسبة إلى محور y .

$$R(2)=R(-2)=\frac{3}{2^2-1}=1$$

$$R(0.5)=R(-0.5)=\frac{3}{(0.5)^2-1}=-4$$

وقع $(2, 1)$ ، $(-2, 1)$ ، $(0.5, -4)$ ، $(-0.5, -4)$. باستخدام الخطوط المقاربة كحدود نرسم الرسم البيانى الموضح فى شكل 3-8 .



شكل 3-8

• الكسور الجزئية Partial Fractions

الكسور الكسرية Rational Fractions

الكسر الكسرى فى x هو خارج القسم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ لكثيرى حدود فى x فتكون

$$\frac{3x^2-1}{x^3+7x^2-4}$$

كسرًا كسريًا

الكسور الحقيقية Proper Fractions

الكسر الحقيقى هو ذلك الكسر الذى تكون فيه درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام . لذلك تكون

$$\frac{2x-3}{x^2+5x+4} \quad \text{و} \quad \frac{4x^2+1}{x^4-3x}$$

كسورًا حقيقية .

الكسر غير الحقيقى هو الكسر الذى تكون فيه درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام . لذلك

$$\frac{2x^3+6x^2-9}{x^2-3x+2}$$

كسرًا غير حقيقى .

بالقسمة يمكن دائمًا كتابة الكسر الغير حقيقى كمجموع كثيرة الحدود وكسرًا حقيقيًا .

$$\frac{2x^3+6x^2-9}{x^2-3x+2}=2x+12+\frac{32x-33}{x^2-3x+2}$$

الكسور الجزئية Partial Fractions

يمكن عادة كتابة الكسر الحقيقى المعطى كمجموع كسور أخرى (تسمى الكسور الجزئية) وتكون مقاماتها أقل فى الدرجة عن مقام الكسر المعطى .

مثال 3-20 :

$$\frac{3x-5}{x^2-3x+2}=\frac{3x-5}{(x-1)(x-2)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

النظريات الأساسية Fundamental Theorems

يمكن كتابة الكسر الحقيقى كمجموع لكسور جزئية حسب القواعد التالية :

(1) عوامل خطية أى واحد منها غير متكرر .

إذا وجد عامل خطى (ax+b) مرة واحدة كعامل لمقام كسر معين فمناظرًا لهذا العامل نجمع كسرًا جزئيًا A/(ax+b) حيث A ثابتًا لا يساوى صفرًا .

مثال 3-21 :

$$\frac{x+4}{(x+7)(2x-1)}=\frac{A}{x+7}+\frac{B}{2x-1}$$

(2) عوامل خطية بعضها مكرر .

إذا حدث العامل الخطى $ax+b$ عدد p من المرات كعامل لمقام كسر معين فمناظر لهذا العامل اجمع p من الكسور الجزئية

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

حيث $A_1, A_2, ..., A_p$ ثوابت و A_p لا يساوى صفرًا .

مثال 3-22 :

$$\frac{3x-1}{(x+4)^2}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{(x+4)^2}$$

(3) عوامل تربيعية لا يتكرر أى واحد منها

إذا وجد عامل تربيعى ax^2+bx+c مرة واحدة كعامل لمقام كسر معين فمناظرًا لهذا العامل اجمع الكسر الجزئى .

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

حيث A ، B ثوابت وكلاهما ليس صفرًا .

ملاحظة : افترض أن ax^2+bx+c لا يمكن تحليلها إلى عاملين خطيين حقيقيين بمعاملات صحيحة .

مثال 3-23 :

$$\frac{x^2-3}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

(4) عوامل تربيعية بعضها متكرر .

$$ax^2 + bx + c$$

إذا حدث عاملاً تربيعيًا غير قابل للتخفيض عــدد p مــن المــرات كعامل لمقام كسر معين فمناظرًا لهذا العامل نجمع p من الكسور الجزئية

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}$$

حيــث A_1 ، B_1 ، A_2 ، B_2 ، . . . . ، A_p ، B_p ثوابــت ، A_p ، B_p ليس كلاهما صفرًا .

مثال 3-24 :

$$\frac{x^2-4x+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

إيجاد مفكوك الكسور الجزئية

Finding the Partial Fractions Decomposition

بمجرد تعيين شكل مفكوك الكسور الجزئية تكون الخطوة التالية هى إيجاد مجموعة المعادلات الواجب حلها للحصــول علــى قيــم الثوابــت المطلوبــة لمفكوك الكسور الجزئية . بالرغم من أن مجموعة المعادلات تحتوى عادة على أكثر من ثلاث معادلات إلا أنه عادة مــا يكــون ســهلاً إيجــاد قيمــة واحد أو اثنين من المتغــيرات أو العلاقــات بيــن المتغــيرات التــى تســمح للمجموعة أن تخفض إلى حجم أصغر يسمح بحلها بأى طريقة معتادة .

مثال 3-25 : أوجد مفكوك الكسور الجزئية لـ

Example 3-25: Find the partial fraction decomposition of

$$\frac{3x^2+3x+7}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

باستخدام القاعدة (2) ، (3) من الجزء السابق يكون شكل المفكوك هو

$$\frac{3x^2+3x+7}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{3x^2+3x+7}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A(x-2)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

$$3x^2+3x+7 = Ax^3 - 2Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + B + Cx^3 - 4Cx^2 + Dx^2 + 4Cx - 4Dx + 4D$$

$$3x^2+3x+7 = (A+C)x^3 + (-2A+B-4C+D)x^2 + (A+4C-4D)x + (-2A+B+4D)$$

بمساواة معاملات الحدود المتناظرة فى كلاً من كثيرات الحدود ووضع الآخرين مساويًا للصفر نحصل على مجموعة المعادلات لحلها

$$A + C = 0$$

$$-2A + B - 4C + D = 3$$

$$A + 4C - 4D = 3$$

$$-2A + B + 4D = 7$$

بحل هذه المجموعة نحصل على $A = -1$ و $B = 5$ و $C = 1$ و $D = 0$

فيكون مفكوك الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2+3x+7}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{-1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}+\frac{x}{x^2+1}$$

الفصل الرابع
المعادلات الخطية
Linear Equations

فى هذا الفصل :

- ✔ المعادلات .
- ✔ المعادلات الخطية .
- ✔ معادلات الخطوط .
- ✔ المعادلات الخطية الآنية .
- ✔ المتباينات .
- ✔ المحددات ومنظومات المعادلات الخطية .

• المعادلات Equations

المعادلات هى نص تساوى بين مقدارين يطلق عليهما الأطراف . المعادلة التى تكون صحيحة فقط لقيم معينة من المتغيرات (فى بعض الأحيان يطلق عليهم المجاهيل) المحتواة يطلق عليها **المعادلات المشروطة** أو ببساطة المعادلات . المعادلة التى تكون صحيحة لكل القيم المسموح بها للمتغيرات (أو المجاهيل) المحتواة يطلق عليها **المتطابقات** . نقصد بالقيم المسموح بها هى القيم التى تعرف أطراف المعادلة .

مثال 4-1 : تكون $x + 5 = 8$ صحيحة فقط عند $x = 3$ وعلى ذلك فهى معادلة مشروطة .

Example 4-1: $x + 5 = 8$ is true only for $x = 3$; it is a conditional equation.

مثال 4-2 : تكون $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$ صحيحة لكل قيمة x ، y فتكون متطابقة .

Example 4-2: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ is true only for all values of x and y; it is an identity.

حلول المعادلة المشروطة هى قيم المجاهيل التى تجعل الطرفين متساويين . يقال أن هذه الحلول تحقق المعادلة . إذا كان هناك مجهول واحد فقط متضمناً فيطلق على الحلول جذور . حل معادلة يعنى إيجاد كل الحلول .

على ذلك $x = 2$ هو حل أو جذر للمعادلة $2x + 3 = 7$ لأننا إذا عوضنا $x = 2$ فى المعادلة نحصل على $2(2) + 3 = 7$ ويكون كلا الطرفين متساويان أى أن المعادلة قد تحققت . وبالمثل ثلاثة (من كثير) من الحلول للمعادلة $2x + y = 4$ هى $x = 0$ ، $y = 4$ و $x = 1$ ، $y = 2$ و $x = 5$ و $y = -6$.

العمليات المستخدمة فى تحويل المعادلات

Operations Used in Transforming Equations

- إذا أضيفت متساويات إلى متساويات كانت النتائج متساوية ولذلك كان $x - y = z$ فيمكننا إضافة y إلى كلا الطرفين لنحصل على $x = y + z$.
- إذا طرحت متساويات من متساويات كانت النتائج متساوية . لذلك إذا كان $x + 2 = 5$ وطرحنا 2 من كلا الطرفين نحصل على $x = 3$.
- إذا ضربت متساويات فى متساويات كانت النتائج متساوية ولذلك إذا ضرب طرفى $(1/4)y = 2x^2$ بالعدد 4 تكون النتيجة $y = 8x^2$.

- إذا قسمت متساويات على متساويات فتكون النتائج متساوية بشرط عدم القسمة على صفر .

لذلك إذا قسم طرفى $-4x = -12$ على -4 نحصل على $x = 3$.

- رفع متساويات إلى نفس القوة تكون متساوية لذلك إذا كان $T = 2\pi\sqrt{(1/g)}$ فيكون $T^2 = (2\pi\sqrt{(1/g)}\,)^2 = 4\pi^2 .1/g$.

- جذور متساوية لمتساويات تكون متساوية .

إذا كان $r^3 = \frac{3V}{4\pi}$ فإن $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

- معكوس المتساويات متساوية بشرط عدم حدوث معكوس لصفر .

لذلك إذا $1/x = 1/3$ فتكون $x = 3$.

القوانين Formulas

القانون هو معادلة تعبر عن حقيقة عامة أو قاعدة أو مبدأ .

فمثلاً فى الهندسة القانون $A = \pi r^2$ يعطى مساحة الدائرة A بدلالة نصف قطرها r .

فى الطبيعة القانون $s = (1/2)gt^2$ ـ حيث g تكون تقريبًا $32.2\ ft/s^2$ ـ يعطى العلاقة بين المسافة s بالقدم الذى يَسْقُطه غرض سقوطًا حرًا من السكون خلال زمن t بالثانية .

حل قانون لأحد المتغيرات يشتمل على إجراء نفس العمليات لكلا طرفى القانون حتى يظهر المتغير المطلوب على طرف واحد من المعادلة وليس كلا الطرفين .

المعادلات كثيرة الحدود Polynomial Equations

الحد الأحادى هو عدد من المجاهيل x , y , z ... لها الشكل $ax^py^qz^r$ حيث الأسس p ، q ، r ، .... إما موجبة أو صفر والمعامل a مستقل

عن المجاهيل . يطلق على مجموعة الأسس ..... + p + q + r درجة الحد فى المجاهيل x , y , z , ...

مثال 4-3 : $3x^2z^3, (1/2)x^4$ ، 6 كلها حدود أحادية . $3x^2z^3$ لها درجة 2 فى x ، 3 فى z ، 5 فى كلا z , x .

✓ يجب أن تعلم

عند الإشارة إلى الدرجة بدون تحديد المجهول المقصود فتكون درجة كل المجاهيل هى المقصودة .

كثيرة الحدود فى مجاهيل مختلفة تشتمل على حدود كل منها كسرية وصحيحة . درجة كثيرة الحدود هذه تعرف بأنها درجة الحدود ذات الدرجة الأعلى .

مثال 4-4 : $3x^3y^4z + xy^2z^5 - 8x + 3$ هى كثيرة الحدود من الدرجة 3 فى x ، 4 فى y ، 7 فى كل من z , y و 6 فى كل من x ، z و 8 فى كل من x ، y ، z .

Example 4-4: $3x^3y^4z + xy^2z^5 - 8x + 3$ is a plynomial of degree 3 in x, 4 in y, 5 in z, 7 in x, 7 in y and z, 6 in x and z, and 8 in x, y, and z.

يمكن كتابة **المعادلة كثيرة الحدود** من الدرجة n فى المجهول x كالآتى :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet + a_{n-1}x + a_n = 0; \quad a_0 \neq 0$$

حيث a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ثوابت معلومة و n عدد صحيح موجب .

كحالة خاصة ترى أن

$$a_0x + a_1 = 0 \quad \text{أو} \quad ax + b = 0$$

من الدرجة 1 (معادلة خطية)

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{أو} \qquad a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

من الدرجة 2 (معادلة تربيعية)

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

من الدرجة 3 (معادلة تكعيبية)

• المعادلات الخطية Linear Equations

المعادلة الخطية فى مجهول واحد لها الشكل $ax + b = 0$ حيث $a \neq 0$ ، b ، a كلاهما ثابتاً . حل هذه المعادلة يعطى $x = -b/a$.

عندما لا نكون المعادلة الخطية فى الشكل $ax + b = 0$ فنبسط المعادلة بضرب كل حد بالمضاعف المشترك الأدنى لكل الكسور فى المعادلة أو إزالة الأقواس أو تجميع الحدود المتشابهة . فى بعض المعادلات نحتاج إلى إجراء أكثر من واحد من الإجراءات .

مثال 4-5 : حل المعادلة $x + 8 - 2(x + 1) = 3x - 6$ لإيجاد x .

Example 4-5: Solve the equation $x + 8 - 2(x + 1) = 3x - 6$ for x.

نزيل الأقواس أولاً

$$x + 8 - 2(x + 1) = 3x - 6$$

نجمع الحدود المتشابهة

$$x + 8 - 2x - 2 = 3x - 6$$

نبسط المعادلة

$$-x + 6 = 3x - 6$$

نضع الأن الحدود المتغيرة فى أحد أطراف المعادلة لعزل الحد المتغير فى أحد أطراف المعادلة نفسها .

$$-x + 6 - 3x = 3x - 6 - 3x$$

بسط المعادلة السابقة

$$-4x + 6 = -6$$

اطــرح 6 مـــن كـــل طـــرف للمعادلـــة لنحصـــل علـــى الحـــد المتغـــير بـــأحد أطراف المعادلة $-4x + 6 - 6 = 6 - 6$

بسط المعادلة السابقة $-4x = -12$

أخيرًا اقسم كل طـــرف بمعـــامل المتغـــير وهذا المعامل هو 4- . $\frac{-4x}{-4} = \frac{-12}{-4}$

الآن اختبر الحل فى المعادلة الأصلية . $x = 3$

اختبار Check

علامـة الاسـتفهام تـدل علـــى عـــدم معرفتنا تمامًا أن الكميتين متساويتان $3 + 8 - 2(3 + 1) = 3(3) - 6$

$11 - 2(4) = 9 - 6$?

$11 - 8 = 3$?

اختبر الحل $3 = 3$

المسائل الكلامية Word Problems

عند حل المســائل الكلاميـة تكـون أول خطـوة هـى تحديـد مـا يجـب إيجاده . الخطوة التاليــة هــى ترجمــة الشــروط المنصــوص عليــها فــى المسألة إلى معادلات أو تحديد القوانين التى تعبر عن شروط المسألة . الحل للمعادلة هو الخطوة التالية .

مثال 6-4 : إذا كان محيط مستطيل هو 8 m ، وطوله أطول من عرضــه بمقدار 14 m . ما هى أبعاد المستطيل ؟

Example 4-6: If the perimeter of a rectangle is 68 meters and the length is 14 meters more than the width, what are the dimensions of the rectangle?

ليكن w عدد أمتار العرض فيكون عدد أمتار الطول w + 14 .

$$2[(w + 14) + w] = 68$$
$$2w + 28 + 2w = 68$$
$$4w + 28 = 68$$
$$4w = 40$$
$$w = 10$$
$$w + 14 = 24$$

المستطيل طوله 24 m وعرضه 10 m .

مثال 4-7 : كم عدد اللترات من الكحول النقى يجب إضافته إلى 15 liters من 60% محلول كحول لتحصل على محلول 80% من الكحول ؟

Example 4-7: How many liters of pure alcohol must be added to 15 liters of a 60% alcohol solution to obtain an 80% alcohol solution?

ليكن n هو عدد اللترات من الكحول التى من الواجب إضافتها .

نظرًا لأن مجموع مقدار الكحـول فـى الكميتين يكون مساويًا لمقدار الكحول فى المخلوط

$$n + 0.60(15) = 080(n + 15)$$

$$n+ 9 = 0.8n + 12$$

$$0.2n = 3$$

$$n = 15$$

يجب إضافة خمسة عشر لترًا من الكحول الصافى .

• معادلات الخطوط Equations of lines

ميل الخط Slope of a Line

المعادلة ax + by = c حيث كلاً من a و b معًا لا يساويان صفرًا و a و b

و c أعداد حقيقية هى الشكل القياسى (العــام) لمعادلـة خـط . الميــــل m لخط يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعرف بالنسبة بين تغــير y مقارنـة بتغير x أو

$$m = \frac{\text{change in } y}{\text{change in } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مع $x_1 \neq x_2$.

مثال 4-8 : ما هو ميل الخط 3x - 4y = 12 ؟

Example 4-8: What is the slope of the line 3x - 4y = 12?

نحتاج أولاً إلى إيجاد نقطتين تحققان معادلة الخط 3x - 4y = 12 . إذا كان x = 0 فيكون 3(0) - 4y = 12 و y = -3 لذلك أحد النقط هى (0, -3) إذا كانت x = -4 فيكون 3(-4) - 4y = 12 و y = -6 . لذلك تكون (-4, -6) نقطة أخرى على الخط .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-6)}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$$

ميل الخط 3x - 4y = 12 هو ¾.

- الميل الموجب يعنى أنه عند زيادة x تزيد y .
- الميل السالب يعنى أنه عند زيادة x تقل y .
- الخط الأفقى y = k حيث k ثابت له ميل صفر .
- الخط الرأسى x = k حيث k ثابت ليس له ميل أى أن الميل غير معرف .

صيغة الميل والجزء المحصور لمعادلة الخط

Slope-Intercept Form of Equation of a Line

إذا كان m ميل خط والجزء المحصــور مــن y هــو (0, b) فيكــون لأى نقطة (x, y) على الخط بحيث $x \neq 0$:

$$y = mx + b \qquad \text{أو} \qquad m = \frac{y-b}{x-0}$$

صيغة الميل والجزء المحصور لمعادلة خط ميله m , b جزء محصور من y هو $y = mx + b$.

مثال 4-9 : أوجد معادلة خط ميله 4- والجزء المحصور من y هو 6 .

Example 4-9: Find the equation of the line wit slope -4 and y intercept 6.

ميل الخط 4- فيكون $m = -4$ والجزء المحصور 6 فيكون $b = 6$.
بالتعويض فى $y = mx + b$ نحصل على $y = -4x + 6$ لمعادلة الخط .

صيغة الميل - نقطة لمعادلة الخط

Slope-Point Form of Equation of a Line

إذا كان ميل خط m ويمر خلال النقطة (x_1, y_1) فنحصل لأى نقطة (x, y) على الخط على $m = (y - y_1)/(x - x_1)$ و $(y - y_1) = m(x - x_1)$. تكون صيغة الميل نقطة لمعادلة الخط هى $y - y_1 = m(x - x_1)$.

مثال 4-10 : اكتب معادلة الخط الذى يمر بالنقطة $(1, -2)$ وميله 2/3- .

Example 4-10: Write the equation of the line passing through the point (1, -2) and having slope -2/3.

نظرًا لأن $(x_1, y_1) = (1, -2)$ ، $m = -2/3$ فنعوض فى $y - y_1 = m(x - x_1)$ لنحصل على $y + 2 = -2/3(x - 1)$ بالتبسيط نحصل على $3(y + 2) = -2(x + 1)$ وأخيرًا $2x + 3y = -4$.

صيغة النقطتين لمعادلة الخط

Two-Point Form of Equation of a Line

إذا مر الخط خلال نقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) فيكون ميله $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ إذا كان $x_2 \neq x_1$. بالتعويض فى المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$ نحصل على

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

صيغة النقطتين لمعادلة الخط هى

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

إذا كان $x_2 \neq x_1$.

- إذا كان $x_2 = x_1$ نحصل على الخط الرأسى $x = x_1$.
- إذا كان $y_2 = y_1$ نحصل على الخط الأفقى $y = y_1$.

مثال 4-11 : اكتب معادلة الخط المار خلال (3, 6) ، (-4, 4) .

Example 4-11: Write the equation of the line passing (3, 6) and (-4, 4).

ليكن $(x_1, y_1) = (3, 6)$ ، $(x_2, y_2) = (-4, 4)$ ثم عوض فى

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 6 = \frac{4 - 6}{-4 - 3}(x - 3)$$

$$-7(y - 6) = -2(x - 3)$$

$$-7y + 42 = -2x + 6$$

$$2x - 7y = -36$$

معادلة الخط خلال النقطتين (3, 6) ، (-4, 4) هى $2x - 7y = -36$.

صيغة المقطعين لمعادلة الخط Intercept Form of Equation of a Line

إذا كان لخط جزء محصور لـ x هو a وجزء محصور لـ y هو b فسيمر خلال النقط (a, 0) ، (0, b) معادلة الخط هى

$$y - b = \frac{0 - b}{a - 0} = (x - 0)$$

إذا كانت $a \neq 0$ والتى تختصر إلى $bx + ay = ab$ إذا كان كلاً من b , a ليس صفرًا نحصل على

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

إذا كان لخط جزء محصور a لمحـور x وجـزء محصـور b لمحـور y وكان كلاً من b , a ليس صفرًا فتكون معادلة الخط هى

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

مثال 4-12 : أوجد الأجزاء المحصورة للخط $4x - 3y = 12$.

Example 4-12: Find the intercepts of the line $4x - 3y = 12$.

ونقسم المعادلة $4x - 3y = 12$ على 12 لنحصل على

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$$

فيكون للخط $4x - 3y = 12$ جزء محصور لـ x هو 3 وجزء محصور لـ y هو 4- .

• المعادلات الخطية الآنية

Simultaneous Linear Equations

منظومة من معادلتين خطيتين آنيتين

Systems of Two Linear Equations

المعادلة الخطية فى المتغيرين y , x تأخذ الصيغة $ax + bx = c$ حيث c , b , a ثابت و b , a ليس كلاهما أصفار . إذا اعتبرنا اثنين مـن هـذه المعادلات

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

فنقول أننا حصلنا على معادلتين آنيتين خطيتين فى مجهولين . أو منظومة من معادلتين خطيتين آنيتين فى مجهولين . يطلق على زوج القيم y , x- (x, y) - التى تحقق هاتين المعادلتين الحل الآنى للمعادلات المعطاة .

لذلك الحل الآنى للمعادلتين $x + y = 7$ و $x - y = 3$ هو (5, 2) .

موضح هنا ثلاث طرق لحل مثل هذه النظم للمعادلات الخطية

• **الحل بالجمع أو الطرح** . إذا لزم ـ اضرب المعادلات المعطاة بـالأعداد التى تجعل معاملات أحد المجاهيل فى المعـادلات الناتجـة متسـاوية عدديًا . إذا كانت إشارات المعادلات المتساوية مختلفة فاجـمع المعادلات الناتجة . إذا كانت إشارات المعادلات متماثلة فاطرح المعادلات .

مثلاً . اعتبر المعادلتين :

$$(1)\ 2x - y = 4$$
$$(2)\ x + 2y = -3$$

احذف y بضرب (1) فى 2 ثم جمعها على (2) لنحصل على

$$2\ (1) \quad : \quad 4x - y = 8$$
$$(2) \quad : \quad x + 2y = -3$$

بالجمع : $5x = 5$ أو $x = 1$

عوض $x = 1$ فى (1) واحصل على $2 - y = 4$ أو $y = -2$. فيكـون الحـل الآتى لـ (1) و (2) هو (1, 2) .

اختبار ضع $x = 1$ ، $y = -2$ فى (2) لنحصل على $1 + 2(-2) = -3$ أو $-3 = -3$

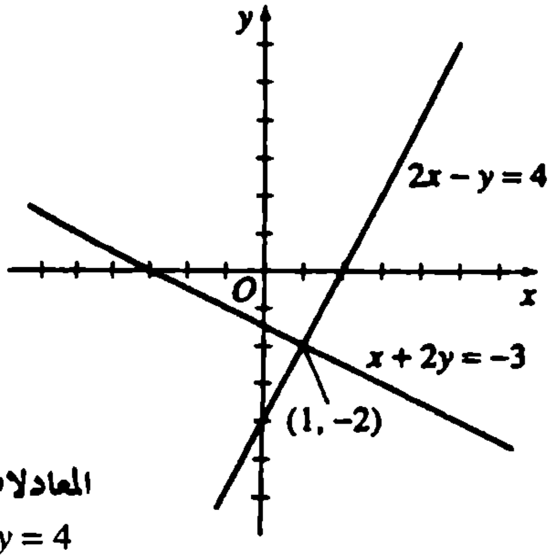
• **الحل بالتعويض** أوجد قيمة أحد المجاهيل بدلالة المجـهول الآخـر فـى واحد من المعادلتين المعطيتين وعوض هذه القيمة فى المعادلة الأخرى .

كمثال ـ اعتبر المنظومة (1) و (2) السابقة من (1) احصل على $y = 2x - 4$ وعـوض هـذه القيمة فى (2) لنحصل على $x + 2(2x - 4) = -3$ والتى تؤول إلى $x = 1$. ضع $x = 1$ فى أى من (1) أو (2) لنحصـل علـى $y = -2$. الحل هو (1, -2) .

• **الحل البيانى** ارسم المعادلتين بيانيًا لنحصل على خطيـن مسـتقيمين . الحل الآنى يعطى بالإحداثيات (x, y) لنقطة تقـاطع هـذه الخطـوط .

شكل 4-1 يوضح أن الحل الآنى لـ $2x - y = 4$ (1) و $x + 2y = -3$ (2)

هو x = 1 ، y = -2 ويكتب أيضًا (1, -2) .



المعادلات المتفقة

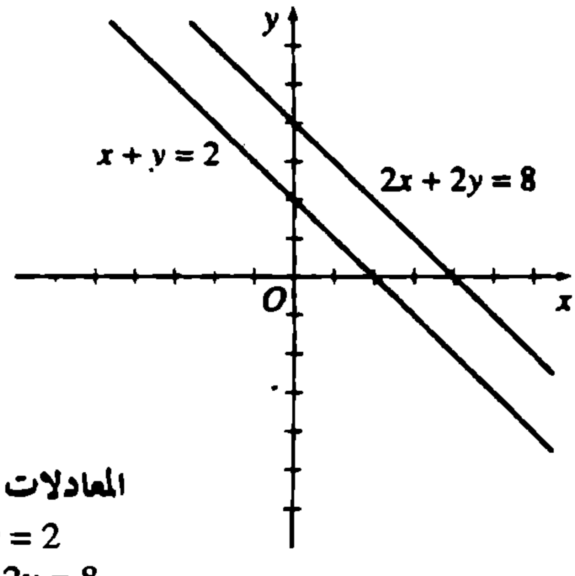
(1) $2x - y = 4$

(2) $x + 2y = -3$

شكل 4-1

إذا كانت الخطوط متوازية فتكون المعادلات غير متفقة ولا يكون لدينا حلاً آنيًا .

مثلاً : (3) x + y = 2 ، (4) 2x + 2y = 8 يكونان غير متفقتين كما هو واضح فى الشكل 4-2 .

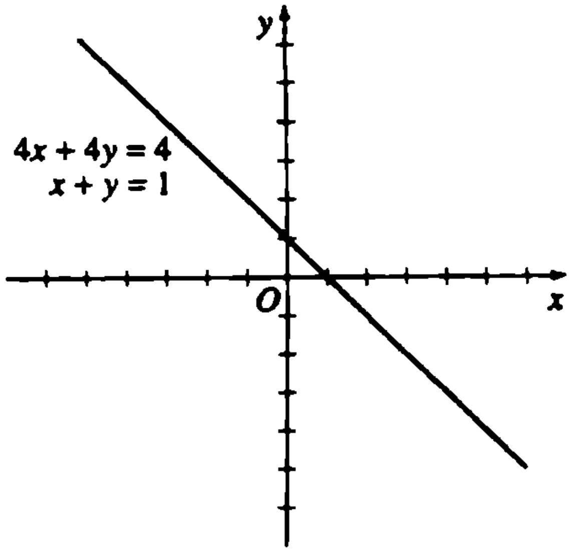


المعادلات غير المتفقة

(3) $x + y = 2$

(4) $2x + 2y = 8$

شكل 4-2



Dependent equations

(5) $x + y = 1$

(6) $4x + 4y = 4$

شكل 4-3

تمثل المعادلات الغير مستقلة بنفس الخطوط لذلك تكون كل نقطة على الخط ممثلة لحل ونظرًا لأنه يوجد عدد لانهائى من النقط فيكون هناك عدد لا نهائى من الحلول الآتية ، مثلاً $(5)\ x + y = 1$ ، $(6)\ 4x + 4y = 4$ تكونا غير مستقلتين كما هو واضح من شكل 4-3 .

المنظومات من ثلاث معادلات خطية

Systems of Three Linear Equations

تحل المنظومة المكونة من ثلاث معادلات خطيــة فـى ثـلاث متغـيرات بحذف أحد المجاهيل من أى اثنين مــن المعـادلات ثـم احـذف نفـس المجهول من أى معادلتين آخريين .

تمثل المعادلات الخطية فى ثــلاث مجـاهيل مسـتويات ويمكــن أن تنتج مستويين اثنين أو أكبر من المستويات المتوازيـة وبذلـك يكونـوا غير متفقتين وليس لها حل . يمكــن أن تنطبـق الثـلاث مسـتويات أو

تتقاطع الثلاث مستويات فى خط مشترك ويكونوا بذلك غير مستقلتين . يمكن أن تتقاطع الثلاث مستويات فى نقطة واحدة مثل السقف والحائطين المكونين لركن فى غرفة وتكون المستويات متفقة .

تكون المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل بالصورة $ax + by + cz = d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية وليست كل الثلاث a, b, c صفرًا . إذا اعتبرنا ثلاث من مثل هذه المعادلات .

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

وأوجدنا قيم (x, y, z) التى تحقق كل المعادلات الثلاث فنقول إننا حصلنا على الحل الآنى لمنظومة المعادلات .

مثال 4-13 : حل منظومة المعادلات

Example 4-13: Solve the system of equations

$$(1) \quad 2x + 5y + 4z = 4$$
$$(2) \quad x + 4x + 3z = 1$$
$$(3) \quad x - 3y - 2z = 5$$

نحذف أولاً x من (1) و (2) ثم من (2) و (3)

$$\begin{array}{r} 2x + 5y + 4z = 4 \\ -2x - 8y - 6z = -2 \\ \hline (4) \qquad -3y - 2z = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + 4y + 3z = 1 \\ -x + 3y + 2z = -5 \\ \hline (5) \qquad 7y + 5z = -4 \end{array}$$

نحذف الآن z من (4) ، (5)

$$\begin{array}{r} -15y - 10z = 10 \\ 14y + 10z = -8 \\ \hline (6) \qquad -y = 2 \end{array}$$

نحل (6) لنحصل على $y = -2$. بالتعويض فى (4) أو (5) نحل لـ z .

$$-3(-2) - 2z = 2 \qquad (4)$$
$$+6 - 2z = 2$$
$$-2z = -4$$
$$z = 2$$

بالتعويض فى (1) أو (2) أو (3) نحل لـ x .

$$2x + 5(-2) + 4(2) = 4 \qquad (1)$$
$$2x - 10 + 8 = 4$$
$$2x - 2 = 4$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

حل منظومة المعادلات هو $(3, -2, 2)$.

نختبر الحل بتعويض النقطة $(2, -2, 3)$ فى المعادلات (1) ، (2) ، (3) .

$$(1) \qquad 2(3) + 5(-2) + 4(2) = 4$$
$$6 - 10 + 8 = 4$$
$$4 = 4$$

$$(2) \qquad 3 + 4(-2) + 3(2) = 1$$
$$3 - 8 + 6 = 1$$
$$1 = 1$$

$$(3) \qquad 3 - 3(-2) - 2(2) = 5$$
$$3 + 6 - 4 = 5$$
$$5 = 5$$

بذلك $(2, -2, 3)$ تكون صحيحة فى كل معادلة من المعادلات الثلاث وهو إجابة المسألة .

• المتباينات Inequalities

المتباينة هى نص أن أحد القيم الحقيقية أو المقادير أكبر أو أصغر من قيمة حقيقية أو مقدار آخر . يدل ما يلى على معنى إشارة المتباينة .

(1) $a > b$ تعنى « a أكبر من b » (أو $a - b$ عدد موجب) .

(2) $a < b$ تعنى « a أصغر من b » (أو $a - b$ عدد سالب) .

(3) $a \geq b$ تعنى « a أكبر من أو تساوى b » .

(4) $a \leq b$ تعنى « a أصغر من أو تساوى b » .

(5) $0 < a < 2$ تعنى « a أكبر من صفر ولكن أصغر من 2 » .

(6) $-2 \leq x < 2$ تعنى « x أكبر من أو تساوى 2- ولكن أقل من 2 » .

تكون المتباينة **المطلقة** صحيحة لكل القيم الحقيقية للحروف المحتواة . مثلاً $(a - b)^2 > -1$ تكون صحيحة لكل القيم الحقيقية لـ a و b نظرًا لأن مربع أى عدد حقيقى يكون موجبًا أو صفرًا .

تكون المتباينة **المشروطة** صحيحة فقط لبعض القيم المعينة للحروف المحتواة . لذلك $x - 5 > 3$ تكون صحيحة فقط عند x أكبر من 8 .

المتباينات $a > b$ و $c > d$ لها نفس الإشارة . المتباينة $a > b$ و $x < y$ ليس لها نفس الإشارة .

قواعد المتباينات Principles of Inequalities

(1) لا تتغير إشارة متباينة إذا أزيد أو أنقص كل طرف بنفس العدد الحقيقى . يلى ذلك أنه يمكن نقل أى حد من أحد جوانب المتباينة إلى الجنب الآخر بشرط تغيير إشارته . لذلك إذا كان $a > b$ فيكون $a + c > b + c$ و $a - c > b - c$ و $a - b > 0$.

(2) لا تتغير إشارة المتباينة إذا ضرب أو قسم طرفاها بنفس العدد الموجب . لذلك إذا كان $a > b$ و $k > 0$ فإن

$\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$ و $ka > kb$

(3) تعكس إشارة المتباينة إذا ضرب كل طرف أو قسم على نفس العدد السالب . لذلك إذا كان $a > b$ و $k < 0$ فإن

$\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$ و $ka < kb$

(4) إذا كانت $a > b$ و n, b, a موجبين فإن $a^n > b^n$ ولكن $a^{-n} < b^{-n}$.

مثال 14-4 :

(أ) $4 < 5$ فيكون $5^3 > 4^3$ أى $125 > 64$ ولكن

$5^{-3} < 4^{-3}$ أو $\frac{1}{125} < \frac{1}{64}$

(ب) $16 > 9$ فيكون $16^{\frac{1}{2}} > 9^{\frac{1}{2}}$ أى $4 > 3$ ولكن

$16^{-1/2} < 9^{-1/2}$ أو $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

(5) إذا كان $a > b$ و $c > d$ فإن $(a + c) > (b + d)$.

(6) إذا كان $a > b > 0$ و $c > d > 0$ فإن $ac > bd$.

متباينات القيم المطلقة Absolute Value Inequalities

القيمة المطلقة لكمية تمثل المسافة من الصفر على خط الأعداد لقيمة هذا المقدار . عندما يكون $|x - a| = b$ حيث $b > 0$ فنقول إن الكمية $x - a$ تبعد عن 0 مقدار b من الوحدات يمين الصفر أو $x - a$ تبعد b من الوحدات يسار الصفر . عندما نقول إن $|x - a| > b$ حيث $b > 0$ فتكون $x - a$ على مسافة من 0 أكبر من b . لذلك $x - a > b$ أو $x - a < -b$ بالمثل إذا كان $|x - a| < b$ حيث $b > 0$ فيكون $x - a$ على مسافة من 0 أقل من b . لذلك $x - a$ تقع بين b من الوحدات أقل من 0 (أى $-b$) و b من الوحدات أكبر من 0 .

مثال 4-15 : حل كل من المتباينات التالية فى x

Example 4-15: Solve each of these inequalities for x.

(أ) $|x-3| > 4$ (ب) $|x+4| < 7$

(جـ) $|x-5| < -3$ (د) $|x-5| > -5$

(أ) $|x-3| > 4$ فتكون $x-3 > 4$ أو $x-3 < -4$ لذلك $x > 7$ أو $x < -1$ فتكون فئة الحل هى $(7, \infty) \cup (-\infty, -1)$ (حيث $\cup$ تمثل اتحاد الفترتين) .

(ب) $|x+4| < 7$ فيكون $-7 < x+4 < 7$ ولذلك $-11 < x < 3$ وتكون فترة الحل $(-11, 3)$.

(جـ) $|x-5| < -3$ نظرًا لأن القيم المطلقة للأعداد تكون دائمًا أكبر من أو تساوى صفرًا فسوف لا تكون هناك قيمًا لتكون القيمة المطلقة أصغر من -3 ، لذلك لا يوجد حلاً ونكتب ϕ لفترة الحل .

(د) $|x+3| > -5$ نظرًا لأن القيم المطلقة تكون دائمًا على الأقل صفرًا فتكون دائمًا أكبر من -5 . فيكون الحل هو كل الأعداد الحقيقية ولفترة الحل نكتب $(-\infty, \infty)$.

المتباينات من درجة أعلى Higher Degree Inequalities

حل المتباينات من درجة أعلى تماثل حل المعادلات من درجة أعلى : فيجب دائمًا مقارنة المقدار مع الصفر إذا كانت $f(x) > 0$ سنكون مهتمين بقيم x التى تجعل حاصل ضرب أو خارج قسمة العوامل موجبًا فى حين أنه إذا كان $f(x) < 0$ فسنرغب فى إيجاد x التى تجعل حاصل ضرب وخارج قسمة العوامل سالبًا .

إذا كان f(x) مقداراً تربيعيًا فسنحصل فقط على عاملين لاعتبارهم ، ويمكن إجراء ذلك باختبار الحالات اعتماداً على الإشارات الممكنة

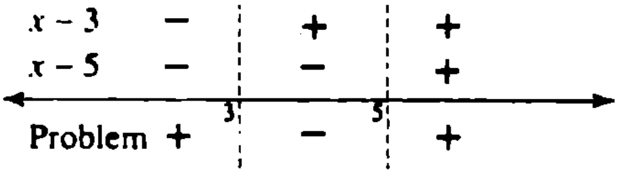
للعاملين والتى سينتج عنها إشارة المقدار المطلوبة . عندما يزداد عدد العوامل فى f(x) بواحد فسيتضاعف عدد الحالات الواجب اعتبارهـا . لذلك يكون عدد الحالات 4 عندما يحتوى على 2 عامل ويكون هنـاك 8 حالات عندما تكون العوامل 3 وهناك 16 حالـة عنـد 4 عوامـل فـى كل مرة نصف الحالات تؤدى إلى مقـدار موجـب ونصـف يـؤدى إلـى مقدار سالب . لذلك فسريعًا ما تصبح طريقة الحـالات طويلـة جـدًا . هناك طريقة بديلة لطريقة الحالات وهى طريقة مخطط الإشارات .

مثال 4-16 : حل المتباينة $x^2 + 15 < 8x$.

Example 4-16: Solve the inequality $x^2 + 15 < 8x$.

المتباينة $x^2 + 15 < 8x$ تماثل $x^2 - 8x + 15 < 0$ و $(x - 3)(x - 5) < 0$ وتكون صحيحة عندما يكون حاصل ضرب $(x - 3)$ و $(x - 5)$ سـالبًا . القيـم الحرجة لحاصل الضرب هى القيم التى تجعـل هـذه العوامـل صفـرًا . وهى تمثل أين تتغير إشارة حاصل الضرب .

توضع القيم الحرجة لـ x وهى 5 , 3 على خط الأعداد لتقسمه إلـى ثلاث فترات . نحتاج إلى إيجاد إشارة حاصل ضرب $(x - 3)$ و $(x - 5)$ فى كل من هذه الفترات لإيجاد الحل (انظر الشكل 4-4) .



شكل 4-4

نرسم خطوطًا رأسية خلال كل قيمة حرجة وترسم إما متقطعة أو متصلة . يدل الخط المتقطع على أن القيمة الحرجة ليسـت فـى الحـل والخـط المتصل على أن القيمة الحرجة فى الحل .

الإشارات فوق خط الأعداد هى إشارات العوامل ونوجدها باختيار قيمة اختيارية فى الفترة كقيمة اختبارية وتحديد ما إذا كان العامل موجبًا أو سالب للقيم الاختيارية . للفترة على يسار 3 اخترنا 1 كقيمة اختبارية وعوضناها فى $x - 3$ لنرى أن العامل يكون -2 فسجلنا إشارة - وللعامل $(x - 5)$ كانت القيمة -4 فسجلنا أيضًا إشارة . للفترة بين 3 و 5 نختار أى قيمة ولتكن 3.5 لنجد $(x - 3)$ موجبة و $(x - 5)$ سالبة . وأخيرًا فى الفترة يمين 5 اخترنا القيمة 12 لنجد أن كلا من $x - 3$ و $x - 5$ موجبًا . تحدد إشارة المسألة المكتوبة ونكتب تحت الخط و فى كل فترة بواسطة إشارات العوامل فى هذه الفترة . إذا كان عدد زوجى من العوامل فى حاصل الضرب أو خارج القسمة سالبًا كان حاصل الضرب أو خارج القسمة موجبًا . إذا كان عدد فردي من العوامل سالبًا فيكون حاصل الضرب أو خارج القسمة سالبًا .

نختار الفترات التى تحقق مسألتنا $(x - 3)(x - 5) < 0$ لذلك نختار الفترات ذات الإشارة السالبة فى مخطط الإشارات . فى الفترة بين 3 ، 5 تكون المسالة سالبة (انظر شكل 4-4) ولذلك فالحل يكون فى الفترة $(3, 5)$. استخدمت الأقواس لتدل على أن 3 و 5 ليست داخلة فى الفترة وقد عرفنا ذلك لأن الخطوط الحدودية كانت متقطعة . أما إذا كانوا داخلين فى الحل فكنا نستعمل قوسًا مربعًا بدلاً من القوس العادى عند نهاية الفترة تاليًا لـ 3 .

حل $x^2 + 15 < 8x$ هو الفترة $(3, 5)$

مثال 4-17 : حل المتباينة .

Example 4-17: Solve the inequality

$$\frac{x-3}{x(x+4)} \geq 0$$

نقارن المتوالية مع 0 ونحلل البسط والمقام لنرى أن القيم الحرجة

للمسألة هى حلول $x = 0$ ، $x - 3 = 0$ ، $x + 4 = 0$ وهى $x = 0$ و $x = 3$ و $x = -4$. نظرًا لوجود ثلاث قيم حرجة فسيقسم خط الأعداد إلى أربعة فترات محددة كما هو موضح بالشكل 4-5 .

		-4		0		3	
$x - 3$	−		−		−		+
x	−		−		+		+
$x + 4$	−		+		+		+
Problem	−		+		−		+

شكل 4-5

الإشارات أعلى الخط هى إشارات كل عامل فى الفترة . الإشارة أسفل الخط هى إشارة المسألة وتكون + عندما يكون عدد زوجى من العوامل سالبًا و – عندما يكون عدد فردى من العوامل سالبًا . نظرًا لأن المسألة تستخدم إشارة ≥ فالقيم التى تجعل البسط صفرًا تكون حلاً ويرسم خطًا متصلاً خلال 3 . نظرًا لأن 0 ، 4- يجعل مقام الكسر صفرًا فلا يكونون حلاً ونرسم خطًا متقطعًا خلال 0 ، 4- (انظر شكل 4-5) .

لأن المسألة تشير إلى أنه مطلوب قيم موجبة أو صفر فسنرغب فى المناطق ذات الإشارة + فى مخطط الإشارات . لذلك سيكون الحل هو الفترات $(-4, 0)$ و $[3, \infty)$ ويكتب الحل فى الصورة $(-4, 0) \cup [3, \infty)$. $\cup$ تشير إلى اتحاد الفترتين . لاحظ أن القوس المربع] قد استخدم لأن القيمة الحرجة داخلة فى الحل والقوس (دائمًا ما يستخدم لجانب المالانهاية ∞ لأى فترة .

المتباينات الخطية فى متغيرين

Linear Inequalities in Two Variables

يشتمل حل المتباينات الخطية فى متغيرين y , x على كل من (x, y)

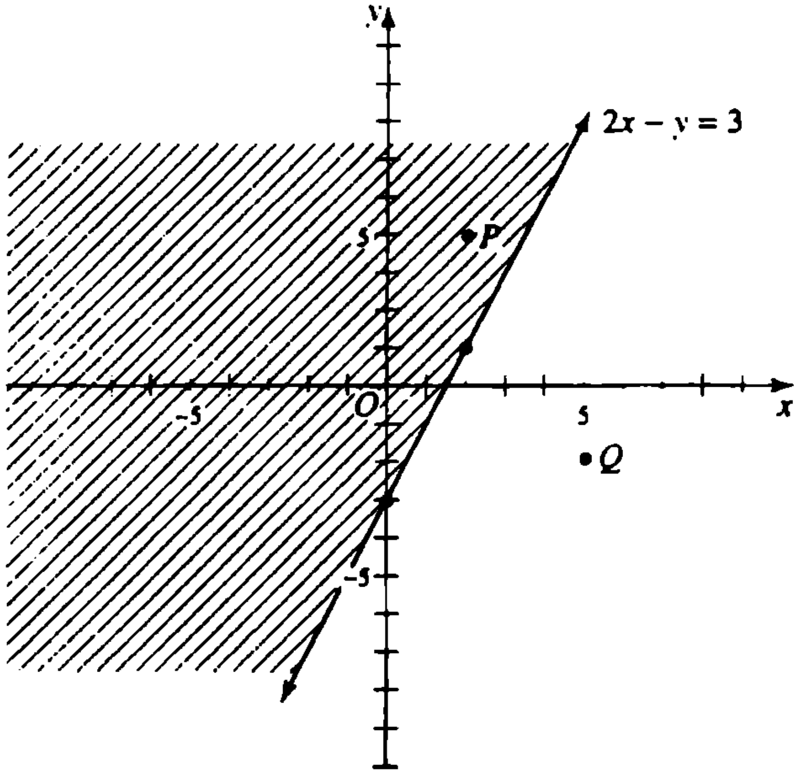
التى تحقق المتباينة . نظرًا لأن المعادلة الخطية تمثل خطًا فإن المتباينة الخطية هى النقط الواقعة على أحد جوانب الخط . نقط الخط تكون محتواه عند استخدام إشارة ≥ أو ≤ فى نص المتباينة . عادة ما نوجد حلول المتباينة الخطية بالطرق البيانية .

مثال 4-18 : أوجد حل $2x - y \le 3$.

Example 4-18: Find the solutions for $2x - y \le 3$.

نرسم الخط المتعلق بالمتباينة $2x - y \le 3$ وهو $2x - y = 3$. نظرًا لاستخدام الرمز ≤ فيكون الخط جزءًا من الحل ونستخدم خطًا متصلاً للدلالة على ذلك (انظر شكل 4-6) .

إذا كان الخط ليس جزءًا من الحل فنستخدم خطًا متقطعًا للدلالة على ذلك . نظلل المنطقة على أحد جوانب الخط حيث النقط هى حلاً



شكل 4-6

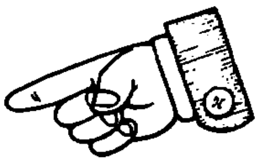
للمتباينة . تحديد منطقة الحل يكون باختيار نقطة اختبار ليست واقعة على الخط . إذا حققت نقطة الاختبار المتباينة تكون كل النقط على هذا الجانب من الخط موجودة فى الحل . إذا لم تحقق نقطة الاختبار المتباينة فلا تكون أى نقطة على هذا الجانب من الخط موجودة فى الحل . لذلك تكون نقط الحل فى الجانب الآخر من الخط من نقطة الاختبار .

النقطة $P(2, 4)$ ليست على الخط $2x - y = 3$ لذلك يمكن استخدامها كنقطة اختبار . بتعويض $(2, 4)$ فى المتباينة $2x - y \leq 3$ نجد $2(2) - 4 \leq 3$ وهذا صحيحًا نظرًا لأن $0 \leq 3$. نظلل جانب الخط المحتوى على نقطة الاختبار $(2, 4)$ للإشارة إلى منطقة الحل . إذا كنا قد اخترنا $Q(5, -2)$ وعوضنا فى $2x - y \leq 3$ وكنا قد حصلنا على $12 \leq 3$ وهذا غير صحيح ولكنا ظللنا الناحية الأخرى من الخط عن Q . هذه هى نفس المنطقة التى وجدناها باستخدام النقطة P .

حل $2x - y \leq 3$ موضح بالشكل 6-4 ويشتمل على المنطقة المظللة والخط .

منظومات المتباينات الخطية Systems of Linear Inequalities

إذا كان لدينا متباينتين أو أكثر فى متغيرين فنقول أنه لدينا منظومة من المتباينات الخطية وحل هذه المنظومة هو تقاطع ـ أو المنطقة المشتركة ـ مناطق الحل للمتباينات .



دائمًا ما يكون للمنظومة ذات المتباينتين والتى تتقاطع معادلاتها المناظرة منطقة حل . إذا كانت المعادلات المناظرة متوازية فيمكن أو لا يمكن أن يكون لها حل . يمكن أو لا يمكن أن يكون هناك حل لمنظومات ثلاث أو أكثر من المتباينات .

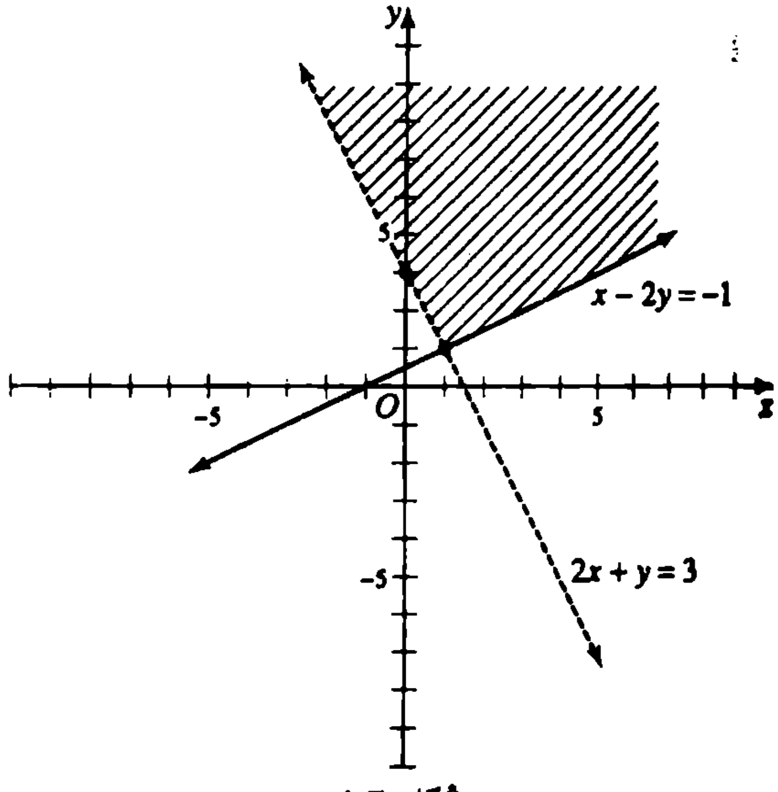
مثال 4-19 : حل منظومة المتباينات $2x + y > 3$ و $x - 2y \le -1$.

Example 4-19: Solve the system of inequalities $2x + y > 3$ and $x - 2y \le -1$.

نرسم المعادلات المناظرة $2x + y = 3$ و $x - 2y = -1$ على نفس المحاور . الخط $2x + y = 3$ يكون متقطعًا نظرًا لأنه غير مُحتَـوى فـى $2x + y > 3$ ولكن يكون الخط $x - 2y = -1$ متصلاً نظرًا لأنه مُحتَوى فى $x - 2y \le -1$.

الآن نختار نقطة اختبار مثل $(0, 5)$ ليست واقعة على أى من الخطين ونحدد إلى أى جانب من كل خط لنظلل ونظلل فقط المنطقة المشتركـة . نظرًا لأن $2(0) + 5 > 3$ صحيحة فتكون منطقــة الحـل إلـى يميـن وفـوق الخط $2x + y = 3$. نظرًا لأن $0 - 2(5) \le -1$ صحيحة فمنطقة الحـل علـى يسار وأعلى الخط $x - 2y = -1$.

منطقة حل $2x + y > 3$ و $x - 2y \le 1$ هى المنطقة المظللـة للشكـل 4-7 والذى يحتوى على جزء من الخط المتصل المحدد للمنطقة المظللة .



شكل 4-7

• المحددات ومنظومات المعادلات الخطية
Determinants and Systems of Linear Equations

المحددات من الرتبة الثانية Determinants of Second Order

الرمز :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

يشتمل على أربعة أعداد a_1 ، b_1 ، a_2 ، b_2 مرتبين فى صفين وعمودين ويطلق عليه **محدد من الرتبة الثانية** . يطلق على الأربعة أرقام عناصر المحدد . بالتعريف

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

لذلك

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(3)(-1) = -4+3 = -1$$

هنا العنصرين 2 ، 3 فى الصف الأول والعنصرين 1- ، 2- فى الصف الثانى . العنصرين 2 ، 1- فى العمود الأول والعنصرين 3 ، 2- فى العمود الثانى . يكون المحدد عدداً . المحدد من الرتبة الأولى هو الرقم نفسه .

قاعدة كرامر Cramer's Rule

يمكن حل منظومات المعادلتين الخطيتين فى مجهولين باستخدام مصفوفات الرتبة الثانية إذا أعطيت منظومة المعادلات .

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

فيكون من الممكن استخدام أى طريقة وصفت فى **المعادلات الخطية الآنية** لنحصل على

$$x=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2},\quad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}\quad (a_1b_2-b_1a_2\neq 0)$$

يمكن كتابة هذه القيم لـ x ، y بدلالة مصفوفات الدرجة الثانية كما يلى :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (4.2)$$

من السهل تذكر الصيغ المحتوية على مصفوفات واضعين فى الاعتبار ما يلى :

(أ) مقام (4.2) أعطى بالمحدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

والعناصر فيها هى معاملات x ، y مرتبة كما فى المعادلات المعطية (4.1) . هذا المحدد يشار إليه D ويطلق عليه **محدد المعاملات** .

(ب) البسط فى الحل لكلا المجهولين هو نفسه مصفوفة المعاملات D عدا أن عمود معاملات المجهولة الواجب إيجاده قد استبدل بعامود الثوابت على الطرف الأيمن من (4.1) . عند استبدال عمود المعاملات للمتغير x بعامود الثوابت نطلق على المحدد الجديد D_x . عند استبدال عامود معاملات y فى المحدد D بعامود الثوابت نطلق على المحدد الجديد D_y .

مثال 20-4 : حل المنظومة

Example 4-20: Solve the system

$$2x + 3y = 8$$
$$x - 2y = -3$$

مقام كلاً من x ، y هو $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3(1) = -7$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8(-2) - 3(-3) = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 8(1) = -14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

وبذلك يكون حل المنظومة هو $(1, 2)$.

> ✓ **يجب أن تعلم**
>
> يطلق على طريقة حل المعادلات الخطية بالمحددات قاعدة كرامر . إذا كان المحدد $D = 0$ فلا يمكن استخدام قاعدة كرامر لحل المنظومة .

المحددات من الرتبة الثالثة Determinants of Third Order

الرمز :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

والمحتوى على تسعة عناصر مرتبة فى ثلاث صفوف وثلاثة أعمدة يطلق عليه **محدد من الرتبة الثالثة** . بالتعريف تعطى قيمة المحدد بالآتى :

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

قاعدة كرامر للمعادلات الخطية فى 3 مجاهيل هى طريقة لحل المعـادلات التالية فى x ، y ، z .

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

وهى امتداد لقاعدة كرامر للمعادلات الخطية فى مجهولين . يمكن حل المعادلات فى (4.3) لنحصل على

$$x=\frac{d_1b_2c_3+c_1d_2b_3+b_1c_2d_3-c_1b_2d_3-b_1d_2c_3-d_1c_2b_3}{a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3}$$

$$y=\frac{a_1d_2c_3+c_1a_2d_3+d_1c_2a_3-c_1d_2a_3-d_1a_2c_3-a_1c_2d_3}{a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3}$$

$$z=\frac{a_1b_2d_3+d_1a_2b_3+b_1d_2a_3-d_1b_2a_3-b_1a_2d_3-a_1d_2b_3}{a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3}$$

يمكن كتابتها بدلالة المحددات كما يلى

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

D هو محـدد معـاملات x ، y ، z فـى (4.3) ومُفـتَرض أنـه لا يسـاوى صفرًا . إذا كان D يساوى صفرًا فـلا يمكـن اسـتخدام قـاعدة كرامـر لحل منظومة المعادلات .

حل المنظومة هو (x, y, z) حيث

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}$$

الفصل الخامس
المعادلات التربيعية
Quadratic Equations

فى هذا الفصل :

- ✔ المعادلات التربيعية.
- ✔ طرق حل المعادلات التربيعية .
- ✔ مجموع وحاصل ضرب الجذور .
- ✔ طبيعة الجذور .
- ✔ المعادلات الجذرية .
- ✔ منظومات المعادلات المحتوية على تربيعات .

• المعادلات التربيعية Quadratic Equations

نأخذ المعادلة التربيعية فى المتغير x الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a و b و c ثوابت و $a \neq 0$.

لذلك تكون $x^2 - 6x + 5 = 0$ و $2x^2 + x - 6 = 0$ و $3x^2 - 5 = 0$ معادلات تربيعية فى متغير واحد

المعادلة التربيعية الغير كاملة هى تلك التى يكون $b = 0$ أو $c = 0$ مثل $4x^2 - 5 = 0$ و $7x^2 - 2x = 0$ و $3x^2 = 0$.

لحل معادلة تربيعية نوجد قيم x التى تحقق المعادلة . قيم x هذه يطلق عليها أصفار أو جذور المعادلة .

فمثلاً $x^2 - 5x + 6 = 0$ تتحقق بواسطة $x = 2$ و $x = 3$. لذلك تكون $x = 2$ و $x = 3$ أصفارًا أو جذورًا للمعادلة .

• طرق حل المعادلات التربيعية .

Methods of Solving Quadratic Equations

[أ] الحل بالجذر التربيعى (عند $b = 0$) .

مثال 5-1 : حل كل من المعادلة التربيعية فى x .

(أ) $x^2 - 4 = 0$ (ب) $2x^2 - 21 = 0$ (جـ) $x^2 + 9 = 0$

Example 5-1: Solve each quadratic equation for x.

(a) $x^2 - 4 = 0$ (b) $2x^2 - 21 = 0$ (c) $x^2 + 9 = 0$

(أ) $x^2 - 4 = 0$ لذلك $x^2 = 4$ و $x = \pm 2$ وتكون الجذور $x = 2, -2$.

(ب) $2x^2 - 21 = 0$ لذلك $x^2 = 21/2$ وتكون الجذور

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(42)}$$

(جـ) $x^2 + 9 = 0$ لذلك $x^2 = -9$ وتكون الجذور $x = \pm\sqrt{(-9)} = \pm 3i$.

[ب] الحل بالتحليل

مثال 5-2 : حل كل معادلة تربيعية فى x .

(أ) $7x^2 - 5x = 0$ (ب) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Example 5-2: Solve each quadratic equation for x.

(a) $7x^2 - 5x = 0$ (b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(أ) $7x^2 - 5x = 0$ يمكن كتابتها $x(7x - 5) = 0$. نظرًا لأن حاصل

ضـرب العـاملين صفـر فنضـع كل عامـل مسـاويًا للصفر ونحل المعادلات الخطية الناتجة $x = 0$ أو $7x - 5 = 0$ لذلك تكون $x = 0$ و $x = 5/7$ هى جذور المعادلة .

(ب) $x^2 - 5x + 6 = 0$ يمكن كتابتها $(x - 3)(x - 2) = 0$. نظرًا لأن حاصل الضرب يساوى صفـرًا نضـع كـل عـامل مسـاويًا للصفـر ونحـل المعادلتين الخطيتين الناتجة $x - 3 = 0$ و $x - 2 = 0$. لذلك يكون $x = 3$ و $x = 2$ هما جذور المعادلة .

[جـ] الحل بتكملة المربع

مثال 5-3 : حل $x^2 - 6x - 2 = 0$.

Example 5-3: Solve $x^2 - 6x - 2 = 0$.

اكتب المجهولين فى أحد الأطراف والحد الثابت فى الطرف الأخـر . لذلك .

$$x^2 - 6x = 2$$

أضف 9 لكل من الجانبين حيث 9 هـو مربـع نصـف معـامل x فيصبـح الطرف الأيسر مربعًا تامًا فيكون

$$x^2 - 6x + 9 = 2 + 9 \quad \text{أو} \quad (x - 3)^2 = 11$$

لذلك $x - 3 = \pm\sqrt{11}$ وتكون الجذور المطلوبة هى $x = 3 \pm\sqrt{11}$.

[د] الحل باستخدام قانون المعادلات التربيعية .

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث يطلق على $b^2 - 4ac$ **المميز** للمعادلة التربيعية .

مثال 5-4 : حل $2x^3 - 5x + 1 = 0$. هنا $a = 3$ ، $b = -5$ ، $c = 1$.

Example 5-4: Solve $2x^3 - 5x + 1 = 0$. Here $a = 3$, $b = -5$, $c = 1$.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

مثال 5-5 : حل $4x^2 - 6x + 3 = 0$. هنا $a = 4$ ، $b = -6$ ، $c = 3$

Example 5-5: Solve $4x^2 - 6x + 3 = 0$. Here $a = 4$, $b = -6$, $c = 3$.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{8} = \frac{6 \pm 2i\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{2(3 \pm i\sqrt{3})}{8} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{4}$$

[هـ] الحل البيانى

الجذور الحقيقية أو أصفار $ax^2 + bx + c = 0$ هى قيم x المناظرة إلى $y = 0$ على رسم القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$ البيانى . لذلك تكون الحلول هى إحداثيات x للنقط التى يتقاطع فيها القطع المكافئ مع محور x . إذا لم يتقاطع الرسم البيانى مع محور x كانت الجذور تخيلية .

• مجموع وحاصل ضرب الجذور

Sum and product of the Roots

المجموع S وحاصل الضرب P لجذور المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ تعطى $S = -b/a$ و $P = c/a$.

لذلك فى $2x^2 + 7x - 6 = 0$ نجد $a = 2$ ، $b = 7$ ، $c = -6$ بحيث $S = -7/2$ ، $P = -6/2 = -3$.

يلى ذلك أن المعادلة التربيعية التى جذراها r_1 ، r_2 تعطى بالمعادلة $x^2 - Sx + P = 0$ حيث $S = r_1 + r_2$ و $P = r_1 r_2$. لذلك المعادلة التى

جذراها $x = 2$ ، $x = -5$ هى $x^2 - (2 - 5)x + 2(-5) = 0$ أو $x^2 + 3x - 10 = 0$.

• طبيعة الجذور Nature of the Roots

تحدد طبيعة جذور المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بواسطة المميز $b^2 - 4ac$.

عندما تحتوى الجذور على الوحدة التخيلية i فنقول إن الجذور تخيلية .

بافتراض أن a ، b ، c أعداد حقيقية . فيكون :

(1) إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ تكون الجذور حقيقية وغير متساوية .

(2) إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ تكون الجذور حقيقية ومتساوية .

(3) إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ تكون الجذور تخيلية .

بافتراض أن a ، b ، c أعداد كسرية فيكون :

(1) إذا كان $b^2 - 4ac$ مربعًا تامًا لا يساوى صفرًا فتكون الجذور حقيقية كسرية وغير متساوية .

(2) إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ تكون الجذور حقيقية وكسرية ومتساوية .

(3) إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ ولكن ليس مربعًا تامًا فتكون الجذور حقيقية وغير كسرية وغير متساوية .

(4) إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ تكون الجذور تخيلية .

لذلك تكون المعادلة $2x^2 + 7x - 6 = 0$ بالمميز $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(2)(-6) = 97$ لها جذور حقيقية غير كسرية وغير متساوية .

• المعادلات الجذرية Radical Equations

المعادلة الجذرية هى معادلة لها مجهول أو أكثر تحت علامة الجذر لذلك

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 1 \qquad \text{و} \qquad \sqrt[3]{y} = \sqrt{y-4}$$

تكون معادلات جذرية

لحل المعادلات الجذرية اعزل أحد الحدود الجذرية لأحد أطراف المعادلة وأنقل كل الحدود الأخرى إلى الطرف الآخر إذا رفع طرفى المعادلة بعد ذلك إلى قوة تساوى درجة الجذر المعزول فيزال الجذر . تكرر هذه الطريقة حتى لا تتواجد أى جذور .

مثال 5-6 : حل $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=1$

Example 5-6: Solve $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=1$

بالنقل $\sqrt{x+3}=\sqrt{x}+1$

بالتربيع $x+3=x+2\sqrt{x}+1$ أو $\sqrt{x}=1$

وأخيرًا تربيع الطرفين يعطى $x = 1$

اختبار : $\sqrt{1+3}-\sqrt{1}$? $1, 2-1=1$

• منظومات المعادلات المحتوية على تربيعات
Systems of Equations Involving Quadratics

الحلول البيانية Graphical Solution

الحلول الآنية الحقيقية لمعادلتين تربيعيتين فى y, x هى قيم y, x المناظرة لنقط تقاطع الرسمين البيانيين للمعادلتين إذا لم تتقاطع الرسوم البيانية تكون الحلول الآنية تخيلية .

الحلول الجبرية Algebraic Solution

[أ] معادلة خطية ومعادلة تربيعية

حل المعادلة الخطية لأحد المجاهيل وعوض فى المعادلة التربيعية .

مثال 5-7 : حل المنظومة : (1) $x + y = 7$ (2) $x^2 + y^2 = 25$

Example 5-7: Solve the system (1) $x + y = 7$ (2) $x^2 + y^2 = 25$

بحل (1) فى y نجد $y = 7 - x$. عوض فى (2) واحصل على $x^2 + (7 - x)^2 = 25$ أى $x^2 - 7x + 12 = 0$ أى $(x - 3)(x - 4) = 0$ و $x = 3, 4$. عندما تكــون $x = 3$ فيكون $y = 7 - x = 4$ وعندما تكـون $x = 4$ فيكـون $y = 7 - x = 3$ ولذلك تكون الحلول الآنية هى $(3, 4)$ ، $(4, 3)$.

[ب] معادلتان بالشكل : $ax^2 + bx^2 = c$

استخدم طريقة الجمع والطرح .

مثال 5-8 : حل المنظومة : (1) $2x^2 - y^2 = 7$ (2) $3x^2 + 2y^2 = 14$

Example 5-9: Solve the system (1) $2x^2 + y^2 = 7$ (2) $3x^2 + 2y^2 = 14$

لحذف y اضرب (1) فى 2 واجمع إلى (2) لنجد

$$7x^2 = 28 \quad , \quad x = \pm 2 \quad \text{أو} \quad x^2 = 4$$

الآن ضع $x = 2$ أو $x = -2$ فى (1) لنحصل على $y = \pm 1$. الأربعة حلــول هى $(2, 1)$ ، $(-2, 1)$ ، $(2, -1)$ ، $(-2, -1)$.

[جـ] معادلتان بالشكل : $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

مثال 5-9 : حل المنظومة

(1) $x^2 + xy = 6$ (2) $x^2 + 5xy - 4y^2 = 10$

Example 5-9: Solve the system

(1) $x^2 + xy = 6$ (2) $x^2 + 5xy - 4y^2 = 10$

الطريقة 1 : احذف الحد الثابت بين كلا المعادلتين . اضرب (1) فى 5 و (2) فى 3 واطرح لتجد

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \;, \quad (x - 2y)(x - 3y) = 0 \;, \quad x = 2y \quad \text{أو} \quad x = 3y$$

ضع الآن $x = 2y$ فى (1) أو (2) لنحصل على $y^2 = 1$ أو $y = \pm 1$.

عند $y = 1$ نكون $x = 2y = 2$ وعند $y = -1$ تكون $x = 2y = -2$ لذلــك يكـون الحلان $x = 2 , y = 1$ أو $x = -2 , y = -1$ ثم ضع $x = 3y$ فى (1) أو (2) لنحصل على

$$y^2=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

عند

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=3y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

عند

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

فتكون الحلول الأربع

$$(2,1);\ (-2,-1);\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

الطريقة 2 : ليكن $y = mx$ فى كلا المعادلتين

من (1)

$$x^2+mx^2=6,\quad x^2=\frac{6}{1+m}$$

من (2)

$$x^2+5mx^2-4m^2x^2=10,\quad x^2=\frac{10}{1+5m-4m^2}$$

لذلك

$$\frac{6}{1+m}=\frac{10}{1+5m-4m^2}$$

ومنها $m = 1/2 , 1/3$ لذلك $y = x/2$ و $y = x/3$ الحـل يسـتمر كمـا فـى الطريقة 1 .

الفصل السادس
المتواليات والمتسلسلات والاستنتاج الرياضى
Sequences, Series, and Mathematical Induction

فى هذا الفصل :

- ✔ المتواليات .
- ✔ المتواليات الحسابية .
- ✔ المتواليات الهندسية .
- ✔ المتسلسلات الهندسية اللانهائية .
- ✔ المتوالية التوافقية .
- ✔ المتوسطات .
- ✔ الاستنتاج الرياضى .

• المتواليات Sequences

متوالية الأعداد هى دالة معرفة على فئة الأعداد الموجبة الصحيحة . يطلق على أعداد المتوالية الحدود . المتسلسلة هى مجموع حدود المتوالية .

• المتوالية الحسابية Arithmetic Sequence

المتوالية الحسابية هى متوالية من أعداد كل عدد منها ـ بعد الأول ـ نحصل عليها بجمع عدد ثابتا إلى العدد السابق ويطلق على هذا العدد الثابت **الفارق المشترك** .

لذلك ..... ,3, 7, 11, 15, 19 هى متوالية حسابية لأن كل حد نحصل عليه بجمع 4 إلى العدد السابق . فى المتوالية الحسابية ,50, 45, 40 يكون الفارق المشترك هو $-5 = 40 - 45 = 45 - 50$.

القوانين العامة للمتوالية الحسابية يشتمل :

- الحد النونى أو الحد الأخير $l = a + (n - 1)d$.
- مجموع أول n من الحدود .

$$S = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

حيث a = أول حد من المتوالية .

d = الفارق المشترك .

n = عدد الحدود .

l = الحد النونى أو الحد الأخير .

S = مجموع أول n من الحدود .

مثال 6-1 : اعتبر المتوالية الحسابية .... ,3, 7, 11 حيث $a = 3$ ، $d = 7 - 3 = 11 - 7 = 4$. الحد السادس هو $l = a + (n - 1)d = 3 + (6 - 1)4 = 23$. مجموع أول ستة حدود هو

Example 6-1: Consider the arithmetic sequence 3, 7, 11, ... where a = 3 and d = 7 - 3 = 11 - 7 = 4. The sixth term is l = a + (n - 1)d = 3 + (6 - 1)4 = 23. The sum of the first six terms is:

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{6}{2}[2(3)+(6-1)4]=78$$

أو

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{6}{2}[3+23]=78$$

• المتوالية الهندسية Geometric Sequence

المتوالية الهندسية هى متوالية أعداد كل عدد منها ـ بعد الأول ـ نحصل عليه بضرب العدد السابق بعدد ثابت يطلق عليه **النسبة المشتركة** .

لذلك ..... ,5, 10, 20, 40, 80 هى متوالية هندسية كل عدد نحصل عليه بضرب العدد السابق فى 2 . فى المتوالية الهندسية .... ,9, -3, 1, -1/3, 1/9 تكون النسبة المشتركة

$$\frac{-3}{9}=\frac{1}{-3}=\frac{-1/3}{1}=\frac{1/9}{-1/3}=-\frac{1}{3}$$

تشتمل القوانين العامة للمتواليات الهندسية على :

- الحد النونى أو الحد الأخير $l=ar^{n-1}$.
- مجموع أول n من الحدود

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{rl-a}{r-1},\ r\neq 1$$

حيث a = الحد الأول .

d = النسبة المشتركة .

n = عدد الحدود .

l = الحد النونى أو الحد الأخير .

S = مجموع أول n من الحدود .

مثال 6-2 : اعتبر المتوالية الهندسية .... ,5, 10, 20 حيث a = 5 و

Example 6-2: Consider the geometric sequence 5, 10, 20, ... where a = 5 and

$$r=\frac{10}{5}=\frac{20}{10}=2$$

الحد السابع هو 320 = $l = ar^{n-1} = 5(2^{7-1}) = 5(2^6) = 320$. ومجموع أول سبع حدود هو :

The seventh term is $l = ar^{n-1} = 5(2^{7-1}) = 5(2^6) = 320$. The sum of the first seven term is

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{5(2^7-1)}{2-1}=635$$

• المتسلسلة الهندسية اللانهائية

Infinite Geometric Series

يعطى المجموع إلى مالانهاية (S_∞) لأى متوالية هندسية وفيه النسبة المشتركة r أقل عدديًا من 1 بالآتى :

$$S_\infty=\frac{a}{1-r} \qquad \text{حيث} \qquad |r|<1$$

مثال 6-3 : اعتبر المتسلسلة الهندسية اللانهائية

Example 6-3: Consider the infinite geometric series

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

Where a = 1 and 2 = -1/2. Its sum to infinity is

حيث $a = 1$ و $r = -1/2$ مجموعها إلى مالانهاية هو

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-(-1/2)}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}$$

• المتوالية التوافقية Harmonic Sequence

المتوالية التوافقية هى متوالية أعداد حيث مقلوبها يشكل متوالية حسابية . لذلك

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \cdots$$

هى متوالية توافقية لأن ..... 2, 4, 6, 8, 10, متوالية حسابية .

مثال 6-4 : احسب الحد الخامس عشر للمتوالية التوافقية .

Example 6-4: Compute the 15^{th} term of the harmonic sequence.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \cdots$$

المتوالية الحسابية المناظرة هى .... 4, 7, 10, حدها الخامس عشر هو $l = a + (n - 1)d = 4 + (15 - 1)3 = 46$. لذلك يكون الحد الخامس عشر للمتوالية التوافقية هو 1/46 .

• المتوسطات Means

الحدود بين أى حدين معينين لمتوالية يطلق عليها **المتوسطات** بين هذين الحدين .

لذلك فى المتوالية الحسابية ... . 3, 5, 7, 9, 11, تكون المتوسط الحسابى بين 3 , 7 هو 5 . الأربع متوسطات حسابية بين 3 , 13 هى 11, 9, 7, 5 .

فى المتوالية الهندسية .... 2, -4, 8, -16, تكون المتوسطات الهندسية بين 2 , 16- هم 4- , 8 .

فى المتوالية التوافقية

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots$$

المتوسط التوافقى بين 1/2 , 1/4 هو 1/3 المتوسطات التوافقية الثلاث بين 1/2 , 1/6 هى 1/3 , 1/4 , 1/5 .

مثال 6-5 : ما هو المتوسط التوافقى بين 3/8 , 1/4 ؟

Example 6-5: What is the harmonic mean between 3/8 and 1/4?

المتوسط الحسابى بين 8/3 , 1/4 هو

$$\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{35}{24}$$

حيث أن المتوسط الحسابى بين A و B يكون دائمًا $\frac{A+B}{2}$. لذلك يكون المتوسط التوافقى بين 3/8 , 1/4 هو 24/35 .

• الاستنتاج الرياضى Mathematical Induction

قاعدة الاستنتاج الرياضى Principle of Mathematical Induction

تعرف بعض النصوص على فئة الأعداد الموجبة الصحيحة . لتقرير صحة هذه النصوص يمكننا إثباتها لكل عدد صحيح موجب محل الاهتمام . ولكن نظرًا لوجود عدد لانهائى من الأعداد الموجبة الصحيحة فلن يكون من المستطاع ـ باستخدام طريقة حالة بحالة ـ إثبات أن النص دائمًا صحيحًا . يمكن استخدام طريقة **الاستنتاج الرياضى** لإثبات صحة نصًا لكل الأعداد الصحيحة الموجبة .

قاعدة الاستنتاج الرياضى Principle of Mathematical Induction

ليكن P(n) نصًا يمكن أن يكون صحيحًا أو غير صحيح لكل عدد صحيح موجب n . يكون P(n) صحيحًا لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا تحقق الشرطين التاليين :

(1) $P(1)$ صحيحًا .

(2) طالما كان $P(k)$ صحيحًا عند $n = k$ فهذا يتضمن $P(k + 1)$ يكون صحيحًا أيضًا .

الإثبات باستخدام الاستنتاج الرياضى

Proof by Mathematical Induction

لإثبات نظرية أو قانون باستخدام الاستنتاج الرياضى فهناك خطوتان واضحتان .

(1) إثبت بالتعويض الفعلى أن النظرية المفترضة أو القانون صحيح لواحد من الأعداد الصحيحة الموجبة n وليكن $n = 1$ أو $n = 2$.

(2) افترض صحة النظرية أو القانون عند $n = k$ ثم أثبت صحته عند $n = k + 1$.

بمجرد إتمام كلا الخطوتين فيمكنك الانتهاء إلى أن النظرية أو القانون صحيح لكل الأعداد الموجبة الصحيحة أكبر من أو تساوى a وهو العدد الموجب الصحيح من الخطوة الأولى .

مثال 6-6 : أثبت بالاستنتاج الرياضى أنه لكل الأعداد الموجبة الصحيحة n .

Example 6-6: Prove by mathematical induction that, for all positive integers n.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

الخطوة الأولى : القانون صحيح عند $n = 1$ لأن .

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

الخطوة الثانية : افترض صحة القانون عند $n = k$ ثم بجمع $(k + 1)$ إلى

كلا الطرفين .

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

وهى قيمة $n(n+1)/2$ عند تعويض $(k+1)$ بدلاً من n .

لذلك إذا كان القانون صحيحًا عند $n=k$ فقد أثبتنا أنه صحيح عند $n = k+1$ ولكن القانون صحيح عند $n = 1$ فيكون صحيحًا عند $n=1+1=2$. لذلك ولأنه صحيح عند $n = 2$ فيكون صحيحًا عند $n=2+1=3$ وهكذا . فيكون القانون صحيحًا لكل الأعداد الموجبة الصحيحة n .

الفصل السابع
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين والاحتمالات
Permutations, Combinations, The Binomial Theorem, and Probability

فى هذا الفصل :

- ✔ قاعدة العد الأساسية .
- ✔ التباديل .
- ✔ التوافيق .
- ✔ ترميز التوافيق .
- ✔ نظرية ذات الحدين .
- ✔ الاحتمالات البسيطة .
- ✔ الاحتمالات المركبة .
- ✔ احتمالات ذات الحدين .
- ✔ الاحتمالات الشرطية .

• قاعدة العد الأساسية
Fundamental Counting Principle

إذا أمكن أداء شيء واحد بعدد m من الطــرق المختلفـة وعنـد أدائـه بأحد هذه الطرق أمكن أداء شيء آخر بعـــدد n مــن الطــرق المختلفـة فيمكن أداء الشيئين على التوالى بعدد $m \bullet n$ من الطرق المختلفة .

فمثلاً إذا كان هناك 3 مرشحين لوظيفة محافظ و 5 مرشحين لوظيفـة عمدة فيمكن شغل كلا المنصبين بعدد $3 \bullet 5 = 15$ طريقة .

وعمومًا إذا أمكن أداء a_1 بعدد x_1 من الطرق وأداء a_2 بعدد x_2 مــن الطرق وأداء a_3 بعدد x_3 من الطرق وأداء a_n بعدد x_n من الطرق فتكــون الحادثة $a_n \ldots\ldots a_1 a_3 a_3$ يمكن أداؤها بعدد $x_n \ldots\ldots x_1 x_3 x_3$ من الطرق .

مثال 1-7 : يملك رجل 3 سترات و 15 قميصًا و 5 بنطلونات إذا كانت هيئة اللبس تتكون من سترة وقميص وبنطلون فأوجد عدد هيئات اللبس المختلفة التى يمكن أن يصوغها الرجل .

Example 7-1: A man has 3 jackets, 10 shirts, and 5 pairs of slacks. If an outfit consists of a jacket, a shirt, and a pair of slacks, how many different outfits can the man make?

$$x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 = 3 \bullet 10 \bullet 15 = 150 \quad \text{هيئة}$$

• التباديل Permutations

التباديل هو ترتيب لكل أو بعض الأعداد من الأشياء بطريقة معينة .

فمثلاً تباديل ثلاثة حروف c , b , a مأخوذين كلهم كل مرة هو abc , acb , bca , bac , cba , cab . تباديل نفس الحروف c , b , a مــأخوذ اثنيــن كل مرة هو cb , ca , bc , ba , ac , ab .

للرقم الطبيعى n يكون مضروب n ويرمز له $n!$ هو حاصل أول n من الأرقام الطبيعة . أى $n! = n\bullet(n-1)(n-2)\bullet\bullet\bullet 2\bullet 1$ وأيضًا $n! = n\bullet(n-1)!$.
يعرف مضروب الصفر ليكون 1 أو $0! = 1$.

مثال 7-2 : أوجد قيمة كل مضروب

Example 7-2: Evaluate each factorial.

(a) 7!   (b) 5!   (c) 1!   (d) 2!   (e) 4!

(a) $7! = 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 5040$
(b) $5! = 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 120$
(c) $1! = 1$
(d) $2! = 2 \bullet 1 = 2$
(e) $4! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 24$

الرمز ${}_nP_r$ تمثل عدد التباديل (الطرق أو الترتيبات) لعدد n من الأشياء مأخوذة r كل مرة . لذلك يمثل ${}_8P_3$ عدد تباديل 8 أشياء مأخوذين 3 كل مرة ويمثل ${}_5P_5$ عدد تباديل 5 أشياء مأخوذين 5 كل مرة .

لاحظ
يستعمل فى بعض الأحيان الرمز $P(n, r)$ وله نفس معنى ${}_nP_r$.

تباديل n من الأشياء المختلفة ماخوذة r كل مرة .

Permutations of n Different Things Taken r at a Time

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عند $r = n$ ، ${}_nP_r = {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\bullet\bullet\bullet 1 = n!$

مثال 7-3 : أوجد قيمة كل من التباديل التالية :

Example 7-3: Evaluate the following permutations:

(a) ${}_5P_1$ (b) ${}_5P_2$ (c) ${}_5P_3$ (d) ${}_5P_4$ (e) ${}_5P_5$

(a) ${}_5P_1 = 5$
(b) ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$
(c) ${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
(d) ${}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
(e) ${}_5P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

مثال 7-4 : أوجد عدد الطرق التى يتوزع بها 4 أشخاص فى أماكنهم داخل مركبة بها 6 كراسى .

Example 7-4: Determine the number of ways in which 4 persons can take their places in a cab having 6 seats.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

تباديل بعض الأشياء المتشابهة مأخوذة كلها فى نفس الوقت .

Permutations with Some Things Alike, Taken All at a Time

عدد التباديل P لعدد n من الأشياء مأخوذين كلهم فى نفس الوقت ومنهم n_1 متشابهين و n_2 آخرين متشابهين و n_3 آخرين متشابهين ... هو

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}$$

حيث $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots = n$.

مثال 7-5 : عدد الطرق التى توزع بها 3 أنصاف ريالات و 7 ريالات على 10 أطفال بحيث يصل إلى كل طفل قطعة عملة واحدة .

Example 7-5: The number of ways 3 dimes and 7 quarters can be distributed among 10 boys, each to receive one coin, is

$$\frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

التباديل الدائرية Circular Permutations

عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة حول دائرة هو $(n-1)!$ طريقة .

مثال 7-6 : عشرة أشخاص يمكن جلوسهم حول منضدة دائرية باستخدام $(10-1)! = 9!$ طريقة .

Example 7-6: Ten persons may be seated at a round table in $(10 - 1)! = 9!$ ways.

• التوافيق Combinations

التوفيق هو تجميع أو اختيار من كل أو جزء عدد من الأشياء بدون الإشارة إلى ترتيب الأشياء المختارة .

لذلك يكون توافيق ثلاثة حروف c , b , a مأخوذ اثنين كل مرة هو ac , bc , ab . لاحظ أن ba , ab هو توفيق واحد ولكن 2 تبديل للحرفين b , a .

الرمز $_nC_r$ يمثل عدد توافيق (الاختيارات أو المجموعات) n من الأشياء مأخوذة r في المرة .

لذلك $_9C_4$ يدل على عدد توافيق 9 أشياء مأخوذة 4 في المرة .

> **لاحظ**
>
> يستخدم فى بعض الأحيان الرمز $C(n, r)$ وله نفس معنى $_nC_r$.

توافيق n من الأشياء المختلفة ماخوذة r كل مرة .

Combinations of n Different Things Taken r at a Time

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

مثال 7-7 : عدد المصافحات باليد التى يمكن تبادلها بين مجموعة

من 12 طالبًا إذا كان كل طالب يصافح كل طالب آخر مرة واحدة .

Example 7-7: The number of handshakes that may be exchanged among a party of 12 students if each student shakes hands once with each other student is.

$$ {}_{12}C_2=\frac{12!}{2!(12-2)!}=\frac{12!}{2!10!}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66 $$

القانون التالى مفيد جد عند تبسيط الحسابات .

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} $$

هذا القانون يدل على أن عدد اختيارات r من n من الأشياء هو نفســه عدد اختيارات (n - r) من n من الأشياء .

مثال 7-8 : أوجد قيمة التوافيق التالية .

Example 7-8: Evaluate the following combination:

(a) ${}_5C_1$ (b) ${}_5C_2$ (c) ${}_5C_3$ (d) ${}_5C_4$ (e) ${}_5C_5$

$$ \text{(a) } {}_5C_1=\frac{5}{1}=5;\ \text{(b) } {}_5C_2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10;\ \text{(c)} {}_5C_3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10; $$

$$ \text{(d) } {}_5C_4=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=5;\ \text{(e) } {}_5C_5=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=1 $$

لاحظ أنه فى كل حالة كان لكل من البسط والمقام نفس عدد العوامل .

توافيق أشياء مختلفة ماخوذة باى طريقة فى كل مرة .

Combinations of Different Things, Taken Any Number at a Time

إجمالى عدد التوافيق C لعدد n من الأشياء المختلفة مأخوذة 1 ، 2 ، 3 ، . . . . ، n فى كل مرة هو

$$ C = 2^n - 1 $$

مثال 7-9 : سيدة فى جيبها عملة ربع جنيه وريال ونصف ريال وشلـــن .
عدد الطرق الإجمالية التى يمكنها سحب النقود من جيبها هو $2^4 - 1 = 15$.

Example 7-9: A woman has in her pocket a quarter, a dime, a nickel, and a penny, The total number of ways she can draw a sum of money from her pocket is $2^4 - 1 = 15$.

• ترميز التوافيق Combinatorial Notation

عدد توافيق n أشياء مختارة r كل مرة $_nC_r$ يمكن كتابته بالصيغة .

$$\binom{n}{r}$$

ويقال عنها ترميز التوافيق

$$C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

حيث n ، r أعداد صحيحة و $r \le n$.

مثال 7-10 : أوجد قيمة كل مقدار .

Example 7-10: Evaluate each expression:

$$(a)\ \binom{7}{3} \quad (b)\ \binom{8}{7} \quad (c)\ \binom{9}{9} \quad (d)\ \binom{5}{0}$$

$$(a)\ \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!3\cdot2\cdot1} = 7\cdot5 = 35$$

$$(b)\ \binom{8}{7} = \frac{8!}{(8-7)!7!} = \frac{8!}{1!7!} = \frac{8\cdot7!}{1\cdot7!} = 8$$

$$(c)\ \binom{9}{9} = \frac{9!}{(9-9)!9!} = \frac{9!}{0!9!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(d)\ \binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)!0!} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

• نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

إذا كان n عدداً صحيحًا موجبًا فمن الممكن فك $(a+x)^n$ كما هو موضح .

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}+\cdots+x^n$$

يطلق على هذه المعادلة **نظرية ذات الحدين** أو قانون ذو الحدين .

توجد صيغ أخرى لنظرية ذات الحدين وبعضـها يسـتخدم التوافيـق للتعبير عن المعاملات . العلاقـة بيـن المعـاملات والتوافيـق موضحـة فيما يلى

$$\frac{5\cdot4}{2!}=\frac{5\cdot4}{2!}\left(\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}\right)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2!}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5!}{(5-2)!2!}=\binom{5}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{(n-3)3!}=\frac{n!}{(n-3)3!}=\binom{n}{3}$$

لذلك

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n!}{(n-1)!1!}a^{n-1}x+\frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{n!}{(n-[r-1])!(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}+\cdots+x^n$$

و

$$(a+x)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\cdots$$
$$+\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}+\cdots+x^n$$

لاحظ أنه فى مفكوك $(a+x)^n$

(1) أس a + أس x = n (أى درجة كل حد هو n) .

(2) عدد الحدود n + 1 حيث n عدد صحيح موجب .

(3) هناك حدين اثنين متوسطين عندما تكون n عدد صحيح موجب **مفرد** .

(4) هناك حد واحد متوسط عندما تكون n عدد صحيح موجب **زوجى** .

(5) معاملات الحدود التى تبعد عن النهايات بمسافات متساوية تكون متماثلة . ومن المثير ملاحظة أن هـذه المعـاملات يمكـن ترتيبـها كما يلى :

$(a+x)^0$						1					
$(a+x)^1$					1		1				
$(a+x)^2$				1		2		1			
$(a+x)^3$			1		3		3		1		
$(a+x)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+x)^5$	1		5		10		10		5		1

تعرف هذه المصفوفة من الأعـداد **بمثلث باسكال** . العـدد الأول والأخـير من كل صف يكون 1 فى حين أن كل عـدد آخر فـى المصفوفة يمكن الحصول عليه بجمع العددين يمينه ويساره فى الصف السابق .

مثال 7-11 : فك $(a+x)^3$.

Example 7-11: Expand $(a+x)^3$.

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ax^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

صيغة الحد الرائى للمقدار $(a+x)^n$ يمكن التعبير عنه بدلالة التوافيق .

$$\text{الحد الرائى} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r+1)(n-r)\cdots 2\cdot 1\,(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

$$\text{الحد الرائى} = \frac{n!}{(n-[r-1])!\,(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

$$\text{الحد الرائى} = \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

مثال 7-12 : احسب الحد السادس فى $(x+y)^{15}$ باستخدام القانون .

$$(a+x)^n \text{ الحد الرائى فى } = (a+x)^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

Example 7-12: Compute the sixth term of $(x + y)^{15}$ using the formula

$$\text{rth term of } (a+x)^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

فى حالة $n = 15$ ، $r = 6$ ، $n - r + 2 = 11$ ، $r - 1 = 5$ ، $n - r + 1 = 10$

$$\text{الحد السادس} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{10}y^5 = 3003x^{10}y^5$$

• الاحتمالات البسيطة Simple Probability

لنفترض أنه يمكن حدوث حادثة فى عدد h من الطرق ولا تحدث فى عدد f من الطرق وكل هذه الطرق h + f متساوية فى احتمال الحدوث .
لذلك يكون احتمال حدوث الحادثة (يطلق عليه نجاح) هو

$$p = \frac{h}{h+f} = \frac{h}{n}$$

واحتمال عدم حدوث هذه الحادثة (يطلق عليه فشل) هو

$$q=\frac{f}{h+f}=\frac{f}{n}$$

حيث $n = h + f$ فيلى ذلك

$$q = 1 - p \text{ و } ، p = 1 - q ، p + q = 1$$

الفـرص فى جـانب حـدوث حـادثة هو $h : f$ أو h/f . الفرض فى جانب عدم حدوث حادثة هو $f : h$ أو f/h . إذا كانت p هو احتمال حـدوث حادثة فتكون الفرص فى حدوثها هو $p : q = p : (1 - p)$ أو $p/1 - p$ وفرص عدم حدوث الحادثة هو $q : p = (1 - p) : p$ أو $(1 - p)/p$.

• الاحتمالات المركبة Compound Probability

يقـال أن حادثين أو أكثر مستقلين إذا كان حدوث أو عدم حـدوث أى واحدة منهم لا تؤثر فى احتمال حدوث أى من الحادثات الأخرى .

لذلك إذا رميت قطعة عملة أربع مرات وظهرت صورة كل مرة فاحتمال ظهور صورة أو كتابة فى الرمية الخامسة لا تتأثر بالرميات السابقة .

احتمالات حدوث اثنين أو أكثر من الحادثات المستقلة يساوى حـاصل ضرب احتمالاتهم المنفصلة .

لذلك يكون احتمال الحصول على صـورة فـى الرميـة الخامسـة والرميـة السادسة هى $1/2(1/2) = 1/4$.

يقـال إن حـادثين أو أكـثر غـير مسـتقلين إذا كـان حـدوث أو عـدم حدوث أحدهما يؤثر على احتمالات حدوث الحادثات الأخرى .

اعتبـر أن حادثتين أو أكثر غيـر مستقـلين . إذا كـان p_1 هو احتمال الحادثـة الأولـى و p_2 احتمـالات أنـه بعـد حـدوث الحادثـة الأولـى

ستحدث الحادثة الثانية و p_3 هو احتمال أنه بعد حدوث الحادثة الأولى والحادثة الثانية ستحدث الحادثة الثالثة وهكذا فيكون احتمال حدوث كل الحادثات بنفس الترتيب هو $p_1 \bullet p_2 \bullet p_3 \bullet\bullet\bullet$.

يقال أن حادثتين أو أكثر متنافيتين إذا كان حدوث أى واحدة منهم تستبعد حدوث الآخرين . احتمالات حدوث واحدة من اثنين أو أكثر من الحادثات المتنافية هو مجموع احتمالات الحادثات منفردة .

مثال 7-13 : إذا رميت قطعة زهر ، ما هى احتمالات الحصول على 5 أو 6 ؟

Example 7-13: If a dice is thrown, what is the probability of getting a 5 or a 6?

الحصول على 5 أو الحصول إلى 6 يكونان حادثتين متنافيتين . لذلك :

$$P(5 \text{ or } 6) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يقال لحادثتين أنهما متداخلتان إذا كانت الحادثتان تشتركان فى أحد النتائج الخارجة . لذلك يمكن أن يحدثا فى نفس الوقت . احتمالات حدوث واحد من اثنين من الحادثات المتداخلة هو مجموع احتمالات الحادثتين منفردتين مطروحًا منها احتمال حدوثهما معًا .

مثال 7-14 : إذا رميت قطعة زهر ، ما هو احتمال الحصول على عدد أقل من 4 أو عددًا زوجيًا .

Example 7-14: If a dice is thrown, what is the probability of getting number less than 4 or an even number?

الأعداد أقل من 4 على قطعة الزهر هى 1 ، 2 ، 3 . الأعداد الزوجية على قطعة الزهر 2 ، 4 ، 6 . نظرًا لأن هاتين الحادثتين لهما خرج

مشترك 2 فيكونان حادثتين متداخلتين

P (أقل من 4 أو زوجى) $= \{$ P(أقل من 4) $+$

P (زوجى) $-$ P(أقل من 4 و زوجى) $\}$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

• احتمالات ذات الحدين Binomial Probability

إذا كان p هو احتمال حدوث حادثة فى أى محاولة منفردة و $q = 1 - p$ هو احتمال أنها ستفشل فى أى محاولة منفردة فتكون احتمالات حدوثها r من المرات فى n من المحاولات هو ${}_nC_r p^r q^{n-r}$. احتمالات حدوث حادثة على الأقل r من المرات فى n من المحاولات هى

$$p^n + {}_nC_1 p^{n-1} q + {}_nC_2 p^{n-2} q^2 + \bullet\bullet\bullet + {}_nC_r p^r q^{n-r}$$

هذا المقدار هو مجموع أول $n - r + 1$ حد من مفكوك ذى الحدين لـ $(p+q)^n$.

• الاحتمالات الشرطية Conditional Probability

احتمال أن حادثة ثانية ستحدث مع العلم أن تكون الحادثة الأولى قد حدثت يطلق عليها الاحتمالات الشرطية . لإيجاد احتمال حدوث حادثة ثانية نقسم احتمالات حدوث كلا الحادثتين على احتمال حدوث الحادثة الأولى . احتمال حدوث الحادثة B بشرط حدوث الحادثة A يشار إليه $P(B|A)$.

مثال 15-7 : يحتوى صندوق على عدد من الكرات السوداء والكرات الحمراء . سحب شخص كرتين بدون إحلال . إذا كانت احتمالات

سحب كرة سوداء وكرة حمراء هـي 15/56 . واحتمـالات سـحب كـرة سوداء فى السحبة الأولى هى 3/4 ، فمـا هـى احتمـالات سـحب كـرة حمراء فى السحبة الثانية إذا علمت أن السحبة الأولى كانت سوداء .

Example 7-15: A box contains black chips and red chips. A person draws two chips without replacement. If the probability of selecting a black chip and a red chip is 15/56 and the probability of drawing a black chip on the first draw is 3/4, what is the probability of drawing a red chip on the second draw, if you know the first chip drawn was black?

إذا كان B هو حادثة سحب كرة سوداء و R هو حادثة سحب كـرة حمراء وتكون P(R|B) هو احتمالات سحب كرة حمـراء فـى السـحبة الثانية بشرط أن تكون السحبة الأولى كرة سوداء .

$$P(R \mid B) = \frac{P(R \text{ and } B)}{P(B)} = \frac{15/56}{3/4} = \frac{15}{56} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{14}$$

لذلك يكون 5/14 هو احتمالات سحب كرة حمراء فى السحبة الثانيـة مع العلم أن الكرة السوداء قد سحبت فى السحبة الأولى .

INDEX قائمة المصطلحات

Abscissa إحداثى x
Absolute inequality المتباينة المطلقة
Addition الجمع
Algebraic expressions المقادير الجبرية
Algebraic fractions الكسور الجبرية
Arithmetic mean المتوسط الحسابى
Arithmetic sequence المتوالية الحسابية
Associative properties خاصية الاتحاد
Asymptotes خطوط مقاربة
Binomial ذات الحدين
Braces أقواس حاصرة
Brackets أقواس مربعة
Circle دائرة
Coefficients معاملات
Combinations توافيق
Common difference الفارق المشترك
Common ratio النسبة المشتركة
Completing the square تكملة المربع
Complex fractions الكسور المركبة
Complex numbers الأعداد المركبة
Complex roots الجذور المركبة
Compound probability الاحتمالات المركبة
Conditional equation المعادلة المشروطة
Conditional inequality المتباينة المشروطة
Conditional probability الاحتمالات المشروطة
Constant ثابت
Continuity اتصال
Coordinate system نظام الإحداثيات
Coordinates الإحداثيات
Counting principle قاعدة العد
Cramer's Rule قاعدة كرامر
Cube of a binomial مكعب ذات الحدين
Cubic equation معادلة تكعيبية
Decimal رقم عشرى
Decomposition فك
Degree درجة
Denominator المقام
Dependent equations معادلات غير مستقلة
Dependent variable متغير تابع
Descartes' Rule of Signs قاعدة ديكارت للإشارات
Determinants محددات
Difference فروق
Discriminant المميز

Dividend المقسوم
Division القسمة
Divisor المقسوم عليه
Domain نطاق
Double roots جذر مزدوج
Equations معادلات
Equivalent fractions كسور مناظرة
Exponential form صيغة أسية
Exponents أسس
Extremes النهايات
Factor عامل
Factor theorem نظرية العوامل
Factoring التحليل إلى عوامل
Formulas قوانين
Fourth proportional المتناسب الرابع
Fractions كسور
Function دالة
Fundamental counting Principle قاعدة العد الأساسية
Fundamental Theorem of Algebra النظرية الأساسية للجبر
Fundamental theorems النظريات الأساسية
Fundamental operations العمليات الأساسية
Geometric means المتوسطات الهندسية
Geometric sequence المتوالية الهندسية
Geometric series المتسلسلة الهندسية
Graphs الرسوم البيانية
Graphical representation التمثيل البيانى
Greatest common factor العامل المشترك الأعظم
Grouping التجميع
Harmonic sequence المتوالية التوافقية
Horizontal asymptoics الخطوط المقاربة الأفقية
Identity متطابقة
Imaginary unit الوحدة التخيلية
Improper fractions كسر غير حقيقى
Independent events حادثة مستقلة
Independent variable متغير مستقل
Index دليل
Induction استنتاج
Inequalities متباينات
Infinite geometric series متسلسلة هندسية لانهائية
Infinity مالا نهائية
Integers أعداد صحيحة
Integral root theorem نظرية الجذور الصحيحة
Interception form صيغة الجزء المحصور
Interest محل الاهتمام

Natural numbers الأعداد الطبيعية
Notation رمز
Number system منظومة الأعداد
Numbers أعداد
Numerator البسط
Odds الفرص
Operations عمليات
Ordinate إحداثى y
Origin نقطة الأصل
Parabola قطع مكافئ
Parentheses أقواس
Partial fractions كسور جزئية
Pascal's triangle مثلث باسكال
Perfect nth powers
القوة النونية التامة
Permutations تباديل
Point نقطة
Polynomial equations
معادلات كثيرة الحدود
Polynomial functions
دوال كثيرة الحدود
Polynomials كثيرة الحدود
Positive numbers أعداد موجبة
Powers قوى
Principal رئيسى
Probability احتمالات
Product حاصل ضرب
Products حواصل ضرب
Proper fraction كسر حقيقى

Intermediate Value Theorem
نظرية القيمة المتوسطة
Inverse property خاصية الإنعكاس
Irrational number
الأعداد غير الكسرية
Irrational roots
الجذور غير الكسرية
Inverse property خاصية الانعكاس
Least common multiple
المضاعف المشترك الأصغر
Like terms الحدود المتماثلة
Linear equations المعادلات الخطية
Lines الخطوط
Literals حروف
Logarithms اللوغاريتمات
Mathematical induction
الاستنتاج الرياضى
Mean proportional
التناسب المتوسط
Means المتوسطات
Minuend المطروح منه
Monomial أحادية الحد
Monomial factor عامل أحادى
Multinomial كثيرة الحدود
Multiplication الضرب
Mutually exclusive events
الحادثات المتنافية
Natural logarithms
اللوغاريتمات الطبيعية

Scaling تغيير القياس
Sense of an inequality إشارة المتباينة
Sequence متوالية
Series متسلسلة
Sets فئات
Shifts الازاحات
Signs الإشارات
Simple probability
الاحتمالات البسيطة
Simultaneous linear equations
المعادلات الخطية الآنية
Slope الميل
Solutions حلول
Special products
حواصل ضرب خاصة
Square مربع
Subtraction طرح
Subtrahend مطروح
Sum مجموع
Symmetry تماثل
Synthetic division القسمة التركيبية
System of equations منظومة معادلات
Terms حدود
Trinomial ثلاثى الحدود
Variable متغير
Variation تغير
Vertical asymptotes
خطوط تقارب رأسية
zero أصفار

Properties of numbers
خواص الأعداد
Proportion تناسب
Proportional متناسب
Proportionality التناسب
Quadrants الأرباع
Quadratic equations
المعادلات التربيعية
Quadratic formula
قانون المعادلات التربيعية
Quotient خارج القسمة
Radical equations
المعادلات الجذرية
Radicals الجذور
Radicand المجذور
Ratio نسبة
Rational fractions الكسور الكسرية
Rational function الدوال الكسرية
Rational number الأعداد الكسرية
Rational root theorem
نظرية الجذور الكسرية
Real numbers الأعداد الحقيقية
Reciprocal معكوس
Rectangular coordinate system
نظام الإحداثيات المتعامدة
Relation علاقة
Remainder الباقى
Remainder theorem نظرية الباقى
Roots الجذور
Rules of signs قاعدة الإشارات

When you don't have the time ... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, this Schaum's Easy Outline is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this Easy Outline packs exciting new learning tools that make mastering college algebra fast, fun- and almost automatic.

SPEEDEE

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing college algebra to the essentials the professor expects you to know. This Easy Outline is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this Easy Outline lets you study algebra anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. Schaum's Easy Outlines give you what you want — better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of algebra the easy way. Schaum's Easy Outline of college algebra helps you master algebra with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- Student-friendly style
- At-a-glance tables
- Perfect for test prep

Arabic version by:

International House for Cultural Investments S.A.E.

McGraw-Hill

A Division of The McGraw-Hill Companies

ISBN : 977 - 282 - 104 - 4